Exercice 1.

Soit E l'ensemble des suites $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum a_n$ soit absolument convergente. Pour tout a dans E, on note :

$$\|a\|=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|.$$

1. Etablir que $(E,\|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

2. On note

$$F=\left\{a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty}a_n=1\right\}.$$

Le sous-ensemble F est-il :

2.a. une partie convexe ?

2.b. ouvert dans $(E,\|\cdot\|)$?

2.c. fermé dans $(E,\|\cdot\|)$?

2.d. borné dans $(E,\|\cdot\|)$?

Exercice 2.

Soit

$$E=\{u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\mid u \text{ bornée}\}.$$

Pour tout $u\in E$, on pose

$$\|u\|=\sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|.$$

1. Etablir que $(E,\|\cdot\|)$ est un evn.

2. On note

$$F=\{u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\mid \lim_{n\to+\infty}u_n=0\}.$$

2.a. Justifier que $F\subset E$.

2.b. L'ensemble F est-il fermé dans $(E,\|\cdot\|)$?

Exercice 3.

Soit $E=\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $F=\{f\in E\mid f(0)=0\}$.

1. Si N désigne une norme sur E, prouver que F est une partie fermée ou dense de (E,N).

2. Donner un exemple de norme sur E pour laquelle F est une partie fermée de (E,N), puis un exemple de norme sur E pour laquelle F est une partie dense de (E,N).

Exercice 4.

On note E l'ensemble des fonctions $f:[0,1]\longmapsto\mathbb{R}$ continues. Pour tout $f\in E$, on pose

$$N(f)=\sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt}.$$

1. Prouver que N est une norme sur E.

2. Comparer N et la norme infinie.

Exercice 5.

Soit $a=(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour tout polynôme $P=\sum_k p_kX^k$ de $\mathbb{C}[X]$, on pose

$$N_a(P)=\sum_k|a_kp_k|.$$

A quelle *condition nécessaire et suffisante* portant sur a l'application N_a est-elle une norme sur $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 6.

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de deux normes N_1 et N_2 ayant des boules unité fermées égales. A-t-on $N_1=N_2$?

Exercice 7.

Déterminer le comportement asymptotique de la suite de terme général

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Exercice 8.

Soient $(u_n)_{n\geqslant0}$ et $(v_n)_{n\geqslant0}$ deux suites de nombres réels telles qu'il existe deux entiers naturels impairs p et q vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim_{n\to+\infty}(u_n^p-v_n^q)=0$$

Etablir que $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=0$.

Exercice 9.

Soient $a > 0$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = a \\ u_{n+1} & = \dfrac{u_n + u_n^2}{2} \end{cases}$$

On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

1. Que dire de a ?

2. Prouver la convergence de $(2^n \cdot u_n)_{n\geqslant 0}$ vers un réel ℓ strictement positif.

3. Trouver un développement asymptotique de u_n à deux termes.

Exercice 10.

Trois moyennes...

1. Soient a, b et c dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\frac{3}{1/a + 1/b + 1/c} \leqslant \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$$

2. Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}, (b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$ définies par $(a_0, b_0, c_0) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} & = \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \\ b_{n+1} & = \sqrt[3]{a_n b_n c_n} \\ c_{n+1} & = \dfrac{3}{1/a_n + 1/b_n + 1/c_n} \end{cases}$$

Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 0}, (b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers la même limite.

Exercice 11.

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \exp\left(\cosh\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) - a \cdot \sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$ où $a \in \mathbb{R}$;

2. $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$;

3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n n^\alpha + n^{2\alpha}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$;

4. $u_n = \dfrac{1}{n^{\tan(\pi/4 + 1/n)}}$;

5. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\tan(\pi/4 + 1/n)}}$;

6. $u_n = \ell n(n) + a\,\ell n(n+1) + b\,\ell n(n+2)$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;

7. $u_n = \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$;

8. $u_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$ où $\alpha > 0$;

9. $u_n = \begin{cases} 0 < u_0 < \frac{\pi}{2} \\ \forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$;

10. $u_n = \dfrac{1}{\ell n(n) + (-1)^n n^\alpha}$ où $0 < \alpha < 1$.

Exercice 12.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sqrt{k}$$

1. Trouver un équivalent de b_n.

2. Montrer que $(b_n + b_{n+1})_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite strictement négative.

3. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{b_n}$.

Exercice 13.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si 9 figure dans l'écriture décimale de } n \\ \dfrac{1}{n^\alpha} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Discuter la nature de la série $\sum u_n$.

2. Même question en remplaçant 9 par un autre chiffre.

Exercice 14.

Soit $a > 0$. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

Exercice 15.

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Etablir la convergence et calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$$

Exercice 16.

Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum x_n$ diverge. On note $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des sommes partielles de $\sum x_n$. Montrer que la série $\sum \frac{x_n}{X_n}$ diverge.

Exercice 17.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite positive décroissante qui tend vers 0, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1})$$

1. Calculer T_n en fonction de S_n.

2. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature et que, si elles convergent, elles convergent vers la même somme.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Prouver la convergence et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}$$