Exercice 1.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n la boule fermée de centre a_n et de rayon r_n. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ B_{n+1} \subset B_n.$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \|a_{n+1} - a_n\| \leqslant r_n - r_{n+1}.$$

2. Si E est un espace de Banach, montrer que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

est une boule fermée.

Exercice 2.

On note E l'ensemble des séries à termes réels absolument convergentes. Pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E, on pose

$$\|u\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

1. Prouver que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

2. Prouver que $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

Exercice 3.

Soient A et B deux parties d'un evn E.

1. Montrer que, si A est ouverte, il en est de même de $A + B$.

2. On suppose A compacte et B fermée. Montrer que $A + B$ est fermée.

3. On suppose A et B compactes. Montrer que $A + B$ est compacte.

4. Trouver A et B fermées dans $\mathbb{R}$ telles que $A + B$ n'est pas fermée.

Exercice 4.

Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Omega_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{k}{n^2}\right\}.$$

Trouver une CNS portant sur k pour que

$$\Omega = \bigcup_{n\geqslant 1} \Omega_n$$

soit un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. Si N désigne une norme sur E, prouver que F est une partie fermée ou dense de (E, N).

2. Donner un exemple de norme sur E pour laquelle F est une partie fermée de (E, N), puis un exemple de norme sur E pour laquelle F est une partie dense de (E, N).

Exercice 6.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sqrt{k}$$

1. Trouver un équivalent de b_n.

2. Montrer que $(b_n + b_{n+1})_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite strictement négative.

3. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{b_n}$.

Exercice 7.

Soit (u_n) une suite definie par $u_1 \geqslant 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$$

Etudier la nature des séries de termes généraux u_n et $(-1)^n u_n$.

Exercice 8.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite positive décroissante qui tend vers 0 telle que $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(u_n - u_{n+1})$ converge et qu'elle a la même somme que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Prouver la convergence et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}$$

Exercice 9.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ell\mathrm{n}(k)}{k}$$

1. Montrer l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$a_n = \frac{\ell\mathrm{n}^2(n)}{2} + c + o(1)$$

2. En déduire la convergence et la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\ell\mathrm{n}(n)}{n}$$

Exercice 10.

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^a}$ pour $a > 0$;

2. $u_n = \displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^2+1}}$;

3. $u_n = (-1)^n n^\alpha \cdot \left(\dfrac{1}{n} - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ pour $a \in \mathbb{R}$;

4. $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (\ell\mathrm{n}(k))^2\right)^{-1}$;

5. $u_n = \left(\cosh\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right)^{\tanh\left(\frac{1}{n}\right)} - 1$;

6. $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}} - \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)^n$;

7. $u_n = \dfrac{n^\alpha (\ell\mathrm{n}(n))^n}{n!}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$;

8. $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$ où $\alpha > 0$;

9. $u_n = \sqrt{n} + \alpha \cdot \sqrt{n+1} + \beta \cdot \sqrt{n+2}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$;

10. $u_n = \left(n^7 + 3n^6\right)^{1/7} - P(n)^{1/3}$ où $P \in \mathbb{R}[X]$;

11. $u_n = \dfrac{1}{n} \cdot \left(\left(\dfrac{\ell\mathrm{n}(n+1)}{\ell\mathrm{n}(n)}\right)^n - 1\right)$;

12. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$.