Exercice 1.

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^a}$ pour $a > 0$;
2. $u_n = \displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^2+1}}$;
3. $u_n = (-1)^n n^\alpha \cdot \left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ pour $a \in \mathbb{R}$;
4. $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (\ell\mathrm{n}(k))^2\right)^{-1}$;
5. $u_n = \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)^{\tanh(\frac{1}{n})} - 1$;
6. $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}} - \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^n$;
7. $u_n = \dfrac{n^\alpha (\ell\mathrm{n}(n))^n}{n!}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$;
8. $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$ où $\alpha > 0$;
9. $u_n = \sqrt{n} + \alpha \cdot \sqrt{n+1} + \beta \cdot \sqrt{n+2}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$;
10. $u_n = \left(n^7 + 3n^6\right)^{1/7} - P(n)^{1/3}$ où $P \in \mathbb{R}[X]$;
11. $u_n = \dfrac{1}{n} \cdot \left(\left(\dfrac{\ell\mathrm{n}(n+1)}{\ell\mathrm{n}(n)}\right)^n - 1\right)$;
12. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$.

Exercice 2.

Soient A et B deux parties d'un evn E.

1. Montrer que, si A est ouverte, il en est de même de $A+B$.

2. On suppose A compacte et B fermée. Montrer que $A+B$ est fermée.

3. On suppose A et B compactes. Montrer que $A+B$ est compacte.

4. Trouver A et B fermées dans $\mathbb{R}$ telles que $A+B$ n'est pas fermée.

Exercice 3.

Soit f une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leqslant a|x| + b.$$

Exercice 4.

Soient f et g, deux applications continues de $[0,1])$ dans lui-même telles que $f \circ g = g \circ f$. Etablir l'existence de $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 5.

Soit une fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$. Prouver l'existence d'un point du graphe de f *distinct de l'origine* en lequel la tangente au graphe passe par l'origine.

Exercice 6.

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^4$ telle que :

$$g(0) = g(1) = g'(0) = g'(1) = 0.$$

Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, il existe $\zeta \in]0,1[$ tel que :

$$g(x) = \frac{g^{(4)}(\zeta)}{24} x^2 (1-x)^2$$

Exercice 7.

On considère une fonction $f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) f'(1) < 0$. Démontrer qu'il existe un réel $0 < a < 1$ tel que $f'(a) = 0$.

Exercice 8.

Cet exercice présente un théorème dû au mathématicien Gaston Darboux, qui montre que le fait de posséder la propriété des valeurs intermédiaires, n'est pas l'apanage des fonctions continues, puisque toute fonction dérivée la possède. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle non vide I. Soit $\alpha = f'(a) < \beta = f'(b)$, $a, b \in I$, deux valeurs de la fonction f'. Nous voulons montrer que pour tout $\gamma \in]\alpha, \beta[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \gamma$.

1. Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - \gamma x$. Montrer que $g'(a) < 0$, $g'(b) > 0$ et en déduire que g n'est pas injective, donc qu'il existe $x_0, x_1 \in [a, b]$, $x_0 < x_1$, tels que $g(x_0) = g(x_1)$.

2. En déduire le résultat annoncé en appliquant le théorème de Rolle à la fonction g entre les points x_0 et x_1.

Exercice 9.

Soit P un polynome réel non-constant dont les racines sont réelles et simples.

1. Montrer que les racines de P' sont aussi réelles et simples.

2. En déduire que pour tout $\alpha > 0$ les racines de $P^2 + \alpha$ sont simples.

Exercice 10.

Déterminer les fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$ telles que $f \circ f = f$ dans les cas suivants :

1. f est continue ; **2.** f est dérivable.

Exercice 11.

Soit une fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$. Prouver l'existence d'un point du graphe de f *distinct de l'origine* en lequel la tangente au graphe passe par l'origine.

Exercice 12.

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, $a < b$, dérivable sur $[a, b]$ et telle que $f(a) = 0$.

1. Montrer que s'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, on ait

$$|f'(x)| \leqslant \alpha f(x),$$

alors f est identiquement nulle.

2. Même question avec :

$$\forall x \in [a, b], \quad |f'(x)| \leqslant \alpha |f(x)|.$$

Exercice 13.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f^2 + (1 + f')^2 \leqslant 1$. Etablir que $f \equiv 0$.