## Exercice 1.

On pose
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3(t)}{t^2}dt.$$

**1.** Justifier l'existence de $I$.

**2.** Pour tout $\varepsilon>0$, on pose :
$$J(\varepsilon)=\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\sin^3(t)}{t^2}.$$

**2.a.** Trouver $a$ et $b$ réels tels que :
$$J(\varepsilon)=a\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}+b\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\sin(3t)}{t^2}.$$

**2.b.** Montrer que
$$J(\varepsilon)=\frac{3}{4}\int_\varepsilon^{3\varepsilon}\frac{\sin(t)}{t^2}.$$

**2.c.** En déduire la valeur de $I$.

## Exercice 2.

Existence et calcul de
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-5t}-e^{-7t}}{t}dt.$$

## Exercice 3.

Existence et calcul de
$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}.$$

## Exercice 4.

Existence et calcul de
$$I=\int_0^{+\infty}\ell\mathrm{n}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt.$$

## Exercice 5.

Prouver l'existence et calculer, pour tout $n\geqslant 2$ :
$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+\sqrt{x^2+1})^n}.$$

## Exercice 6.

Soit, pour $n\geqslant 1$ :
$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^4)^n}.$$

**1.** Justifier l'existence de $I_n$.

**2.** En posant $u=\frac{1}{x}$, montrer que
$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+u^2}{1+u^4}du.$$

Puis en posant $v=u-\frac{1}{u}$, calculer $I_1$.

**3.** Calculer $I_n$.

## Exercice 7.

Existence et calcul de
$$I=\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{th}(t)dt.$$

## Exercice 8.

Calculer
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ell\mathrm{n}(\sin(t))dt.$$

## Exercice 9.

Existence et calcul de
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{Arctan}\,x}{x^2}dx.$$

**Exercice 10.**

Pour réel $\alpha$, on pose

$$I_\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\ell n(\sin(t))\right|^\alpha dt.$$

**1.** Discuter la convergence de $I_\alpha$.

**2.** Calculer $I_1$.

**3.** Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$a_n = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{1/n} dx\right)^n.$$

**3.a.** Etablir que

$$\forall x \leqslant 0,\ \ 1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

**3.b.** Etudier la limite en $+\infty$ de $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

**Exercice 11.**

Soit, pour $n \geqslant 1$ :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^n}.$$

**1.** Justifier l'existence de $I_n$.

**2.** En posant $u = \frac{1}{x}$, montrer que

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4} du.$$

Puis en posant $v = u - \frac{1}{u}$, calculer $I_1$.

**3.** Calculer $I_n$.

**Exercice 12.**

Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt$$

converge et soit strictement positive. Montrer que, pour tout $t > 0$, la série $\sum f(nt)$ converge puis donner un équivalent de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt)$$

quand $t \to 0^+$.

**Exercice 13.**

Etudier le comportement asymptotique de

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{\pi n}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{6n+1}\right)\right)^n.$$

**Exercice 14.**

Calculer

$$\lim_{x\to 2+} (2^x + 3^x - 12)^{\tan(\pi x/4)}.$$

**Exercice 15.**

Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\arctan(x)}{\arctan(x+1)}\right)^x.$$

**Exercice 16.**

Déterminer

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin(x)^4}\left(\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\right).$$

**Exercice 17.**

Déterminer la limite en 0 de

$$\varphi(x) = \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

**Exercice 18.**

Déterminer la limite, lorsque $x \to +\infty$, de

$$\left(e - (1+1/x)^x\right)^{1/x},$$

$$x^2(1+1/x)^x - e\,x^3\,\ell n(1+1/x).$$