Exercice 1.

Etudier la convergence de l'intégrale

$$I=\int_0^{+\infty}\left(\sqrt[3]{x+\cos(x)}-\sqrt[3]{x}\right)dx.$$

Exercice 2.

Existence et calcul de

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-5t}-e^{-7t}}{t}dt.$$

Exercice 3.

Existence et calcul de

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}.$$

Exercice 4.

Soient $a<b$ deux réels. Existence et calcul de

$$I=\int_a^b\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}.$$

Exercice 5.

Existence et calcul de

$$I=\int_0^{+\infty}\ell n\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt.$$

Exercice 6.

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, f et g dans $\mathscr{L}(E)$. Etablir que

$$\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Ker}(g)=E \iff \mathrm{Im}(g\circ f)=\mathrm{Im}(g).$$

Exercice 7.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, f et g deux endomorphismes de E. Etablir que

$$\mathrm{Ker}(id_E-f\circ g)=\{0\} \iff \mathrm{Ker}(id_E-g\circ f)=\{0\}.$$

Exercice 8.

Soit $(u,v)\in(\mathscr{L}(E))^2$, tels que $u^2=u$ et $v\circ u=0$. Montrer que

$$\mathrm{Im}(u+v)=\mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v).$$

Exercice 9.

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $u\in\mathscr{L}(E)$. Etablir que la suite

$$(\mathrm{rg}(u^k)-\mathrm{rg}(u^{k+1}))_{k\in\mathbb{N}}$$

est décroissante.

Exercice 10.

Inégalités classiques et cas d'égalité.

1. Montrer que

$$|\mathrm{rg}(f)-\mathrm{rg}(g)|\leqslant \mathrm{rg}(f+g)\leqslant \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g).$$

2. Prouver que $\mathrm{rg}(f+g)=\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$ *si et seulement si*

$$\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g)=\{0\}\ \text{ et }\ \mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)=E.$$

Exercice 11.

Soient E un espace vectoriel réel de dimension n, f et g deux endomorphismes tels que

$$f+g=id_E\ \text{ et }\ \mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)\leqslant n.$$

1. Montrer que

$$E=\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Im}(g).$$

2. Après avoir justifié l'égalité $f\circ g=g\circ f$, prouver que f et g sont des projecteurs de E.

Exercice 12.

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n, f et g dans $\mathscr{L}(E)$ tels que

$$f+g\in GL(E)\ \text{ et }\ f\circ g=0.$$

Montrer que $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)=n$.

Exercice 13.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, p_1 et p_2 deux projecteurs de E tels que $p_1 \circ p_2 = 0$. On pose $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$.

1. Montrer que q est un projecteur de E.

2. Prouver que

$$\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(p_1) \cap \mathrm{Ker}(p_2)$$

et

$$\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \mathrm{Im}(p_2).$$

Exercice 14.

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Prouver que $\psi = p \circ q$ est un projecteur de E.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.

3. Etablir que $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 15.

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, p et q deux projecteurs de E.

1. Prouver que

$$p \circ q + q \circ p = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

2. Montrer que $p + q$ est un projecteur *si et seulement si*

$$p \circ q = q \circ p = 0.$$

3. On suppose que $p + q$ est un projecteur de E. Montrer que

$$\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$$

et

$$\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q).$$