Exercice 1.

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Etablir que u est un isomorphisme de E *si et seulement si*

$$\forall v \in \mathscr{L}(E),\ (u \circ v \circ u) \Rightarrow (v = 0).$$

2. On pose $\text{rg}(u) = p$. Déterminer la dimension de

$$L_u = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid v \circ u \circ v = 0\}.$$

Que retrouve-t-on ?

Exercice 2.

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Etablir que la suite

$$(\text{rg}(u^k) - \text{rg}(u^{k+1}))_{k\in\mathbb{N}}$$

est décroissante.

Exercice 3.

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n, $p \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

1. Etablir que $\text{rg}(u) \geqslant p - 1$.

2. Montrer que, pour tout $k \leqslant p$,

$$\dim(\text{Ker}(u^k)) \leqslant k \dim(\text{Ker}(u)).$$

3. En déduire que

$$\frac{n}{n - \text{rg}(u)} \leqslant p.$$

Exercice 4.

Soient f et g dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ telles que

$$f^2 = g^2 = 0 \ \text{ et } \ f \circ g = g \circ f.$$

Calculer $f \circ g$.

Exercice 5.

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que si $\text{tr}(f) = \text{rg}(f) = 1$, alors f est un projecteur de E.

Exercice 6.

Soient $0 < p \leqslant n$, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ tels que $f \circ g = id_{\mathbb{R}^p}$.

1. Calculer $\text{rg}(f)$ et $\text{rg}(g)$.

2. Quelle est la nature de l'endomorphisme $g \circ f$ de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 7.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E.

1. Etablir que

$$\dim(\text{Ker}(f \circ g)) \leqslant \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g)).$$

2. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité *si et seulement si* $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(g)$.

Exercice 8.

Soient $n \geqslant 1$, $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts et non nuls, et, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, L_i la forme linéaire définie sur $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ par

$$\forall P \in E,\ \ L_i(P) = \int_0^{a_i} P(u)\,du.$$

Montrer que $(L_1, \ldots, L_n)$ est libre.

Exercice 9.

Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $M \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de M en fonction de ceux de A et B.

2. En cas d'inversibilité, exprimer l'inverse de M en fonction de A et B.

Exercice 10.

Soient A, B, C et D appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right).$$

On suppose que $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Etablir que

$$\text{rg}(M) = n \ \text{ si et seulement si } \ D = CA^{-1}B.$$

Exercice 11.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$ *si et seulement si* A est semblable à une matrice du type

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & \mathbb{O}_n \\ \hline \mathbb{O}_n & \mathbb{O}_n \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad A' \in GL_r(\mathbb{R}).$$

Exercice 12.

Déterminer les éléments propres de la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 13.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels. A tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on associe la fonction

$$\varphi(P) : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(x+t)\,dt.$$

1. *Préliminaires.*

1.a. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$P(b) = \sum_{k=0}^{+\infty} (b-a)^k \frac{P^{(k)}(a)}{k!}.$$

1.b. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. *Expression de φ en fonction de l'opérateur de dérivation.* On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à toute fonction polynôme P associe sa fonction polynôme dérivée P'.

2.a. Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on explicitera, telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n D^n(P).$$

(D^n désignant l'itéré n-ième de D, ie $D^0 = Id, D^2 = D \circ D, \dots$).

2.b. Déterminer la valeur des a_n en fonction de n et de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

3. Quels sont les éléments propres de φ ?

Exercice 14.

Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = A$.

1. Montrer que A n'est pas inversible.

2. Etablir que, pour tout entier naturel k,

$$A^k B - BA^k = kA^k.$$

3. En déduire que A est nilpotente.

Exercice 15.

Soit $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour tout polynôme $P = \sum_k p_k X^k$ de $\mathbb{C}[X]$, on pose

$$N_a(P) = \sum_k |a_k p_k|.$$

1. A quelle *condition nécessaire et suffisante* portant sur a l'application N_a est-elle une norme sur $\mathbb{C}[X]$?

2. On pose

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \ \ \phi(P) = P'.$$

Pour quelles suites a l'endomorphisme ϕ est-il continu ?

Exercice 16.

On munit l'espace vectoriel réel E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de la norme un. Pour tout $f \in E$, on note $u(f)$ l'élément de E défini par,

$$x \in [0,1] \longmapsto u(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Prouver que u est une application linéaire continue et calculer sa norme.