Exercice 1.

Déterminer le comportement asymptotique de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Exercice 2.

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de nombres réels telles qu'il existe deux entiers naturels impairs p et q vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} (u_n^p - v_n^q) = 0$$

Etablir que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Exercice 3.

Soient $a > 0$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = a \\ u_{n+1} & = \dfrac{u_n + u_n^2}{2} \end{cases}$$

On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

1. Que dire de a ?

2. Prouver la convergence de $(2^n \cdot u_n)_{n\geqslant 0}$ vers un réel ℓ strictement positif.

3. Trouver un développement asymptotique de u_n à deux termes.

Exercice 4.

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^a}$ pour $a > 0$;

2. $u_n = \displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{n}} \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^2+1}}$;

3. $u_n = (-1)^n n^\alpha \cdot \left(\dfrac{1}{n} - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ pour $a \in \mathbb{R}$;

4. $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (\ell n(k))^2\right)^{-1}$;

5. $u_n = \left(\cosh\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right)^{\tanh\left(\frac{1}{n}\right)} - 1$;

6. $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}} - \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)^n$;

7. $u_n = \dfrac{n^\alpha (\ell n(n))^n}{n!}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$;

8. $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$ où $\alpha > 0$;

9. $u_n = \sqrt{n} + \alpha \cdot \sqrt{n+1} + \beta \cdot \sqrt{n+2}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$;

10. $u_n = \left(n^7 + 3n^6\right)^{1/7} - P(n)^{1/3}$ où $P \in \mathbb{R}[X]$;

11. $u_n = \dfrac{1}{n} \cdot \left(\left(\dfrac{\ell n(n+1)}{\ell n(n)}\right)^n - 1\right)$;

12. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$.

Exercice 5.

Soit $(z_n) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $d > 0$ tel que

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \ p \neq q \ \Rightarrow\ \left|z_p - z_q\right| > d$$

Soit $\alpha > 2$. Montrer que la série $\sum z_n^\alpha$ est absolument convergente.

Exercice 6.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sqrt{k}$$

1. Trouver un équivalent de b_n.

2. Montrer que $(b_n + b_{n+1})_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite strictement négative.

3. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{b_n}$.

Exercice 7.

Soit $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^\alpha}$$

Exercice 8.

Soit $a > 0$. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

Exercice 9.

Prouver la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$$

Exercice 10.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ell\mathrm{n}(k)}{k}$$

1. Montrer l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$a_n = \frac{\ell\mathrm{n}^2(n)}{2} + c + o(1)$$

2. En déduire la convergence et la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\ell\mathrm{n}(n)}{n}$$

Exercice 11.

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Etablir la convergence et calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$$

Exercice 12.

Soit $x \in [-1,1]$. Prouver l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(2\pi n!\alpha) = x$$

Exercice 13.

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = (u_1 \cdots u_n)^{1/n}$.

1. Etablir que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$(n!)^{1/n} \geqslant \frac{e}{n+1}$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} k u_k$$

Montrer la convergence de la série $\sum \frac{w_n}{n(n+1)}$.

3. Montrer la convergence de la série $\sum v_n$ et établir que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leqslant e \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

4. Cette inégalité est-elle optimale ?

Exercice 14.

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ et $k > 1$ tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

1. Etablir l'existence de $C > 0$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^\beta}$.

2. En déduire la nature de $\sum u_n$. Ce résultat est appelé *règle de Gauss*.

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $(z)_n = z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdots (z+n)$ avec la convention $(z)_0 = 1$ et on pose

$$u_n = \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{1}{n!} \quad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ appartiennent à } \mathbb{R}_+^*$$

La série $\sum u_n$ est appelée *série hypergéométrique de Gauss*. Etudier sa convergence.

Exercice 15.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs tellle qu'à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{n}{n+2}$$

1. Que dire de $\sum u_n$?

2. Proposer une généralisation.

Exercice 16.

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels et convergente. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k u_k = o(n)$$

Exercice 17.

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ une suite à termes positifs de limite nulle. On suppose que la suite définie par,

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = a_1 + \cdots + a_n - n a_n$$

est bornée. Etablir la convergence de la série $\sum a_n$.

Exercice 18.

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum a_n^2$ soit convergente. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt{n}}$$

Etudier $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 19.

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\sum u_n$ soit absolument convergente et vérifie

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_{pn} = 0$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$.

Exercice 20.

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs qui décroît vers 0. Etudier la nature de la série $\sum u_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$$

Exercice 21.

Soit $x \in]0,1]$.

1. Montrer qu'il existe une et une seule suite croissante $(q_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers supérieurs ou égaux à deux telle que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n}$$

2. Montrer que x est irrationnel *si et seulement si* $(q_n)_{n\geqslant 1}$ est stationnaire.

3. Montrer que e est irrationnel.