## Exercice 1.

*Contre-exemple d'une fonction partout continue mais nulle part dérivable.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{\sin(n!^2 x)}{n!} \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

**1.** Soit $y \in \mathbb{R}$. Etablir l'existence de $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que :

$$\left|\sin\left(y + \varepsilon\frac{\pi}{2}\right) - \sin(y)\right| \geqslant 1.$$

**2.** Justifier l'existence de $S(x)$ et montrer que $S$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**3.** *Non-dérivabilité de $S$ sur $\mathbb{R}$.* Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tel que

$$\left|\sin\left(n!^2 a + \varepsilon_n \frac{\pi}{2}\right) - \sin(n!^2 a)\right| \geqslant 1.$$

On pose alors

$$h_n = \frac{\varepsilon_n \pi}{2n!^2}, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k(a+h_n) - u_k(a)}{h_n}$$

et

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{u_k(a+h_n) - u_k(a)}{h_n}.$$

**3.a.** Montrer que

$$s_n = \mathrm{o}(n!) \quad \text{et} \quad r_n = \mathrm{o}(n!).$$

**3.b.** Conclure.

## Exercice 2.

Soient $a < b$, $f_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [a, b], \quad f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt.$$

Etudier la convergence de $\sum f_n$ et calculer sa somme.

## Exercice 3.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose :

$$u_n(x) = n^\alpha x^n (1 - x).$$

Etudier le mode de convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ puis de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

## Exercice 4.

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}.$$

**1.** Etudier le mode de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ sur son domaine $\mathscr{D}$ de définition.

**2.** Etudier la continuité de la somme $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ sur $\mathscr{D}$.

**3.** Etudier la dérivabilité de la somme $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

## Exercice 5.

On pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$$

**1.** Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de $f$.

**2.** Etudier la monotonie et la dérivabilité de la fonction $f$ sur $\mathscr{D}$.

**3.** Montrer l'existence de deux réels $a$ et $b$ tels que :

$$f(x) \underset{0+}{=} \frac{a}{x^2} + b + \mathrm{o}(1)$$

## Exercice 6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de $n$. On pose, pour $s \in \mathbb{R}$,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{et} \quad f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s}$$

**1.** Déterminer les ensembles de définition $\mathscr{D}_\zeta$ et $\mathscr{D}_f$ des fonctions $\zeta$ et $f$.

**2.** Donner une relation entre $f$ et $\zeta$.

**3.** Trouver un équivalent de $f$ en $s_0 = \inf(\mathscr{D}_f)$.

**Exercice 7.**

Déterminer les rayons de convergence des séries enti ères suivantes :

**1.** $\sum_{n\geqslant 0} \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$ ;

**2.** $\sum_{n\geqslant 0} a^{n!} z^n$ ;

**3.** $\sum_{n\geqslant 0} a^n z^{n!}$ ;

**4.** $\sum_{n\geqslant 1} (\cos(1/n))^{n^3} z^n$ ;

**Exercice 8.**

Convergence et calcul de la somme de la série suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}.$$

**Exercice 9.**

On se propose d'étudier les séries entières de la forme

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^p}{n!} x^n$$

où $p \in \mathbb{N}$.

**1.** Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

**2.** Calculer la somme de cette série pour $0 \leqslant p \leqslant 3$.

**3.** Prouver que, pour tout $p$ dans $\mathbb{N}$, il existe $P \in \mathbb{Z}_p[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} n^p = P(x) \cdot e^x.$$

**Exercice 10.**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et pour tout $n$ positif,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+2}.$$

Calculer le rayon de convergence puis la somme de

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n.$$