Exercice 1.

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$;

2. $\sum_{n\geqslant 0} a^{n!} z^n$;

3. $\sum_{n\geqslant 0} a^n z^{n!}$;

4. $\sum_{n\geqslant 1} (\cos(1/n))^{n^3} z^n$;

Exercice 2.

Convergence et calcul de la somme de la série suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}.$$

Exercice 3.

On se propose d'étudier les séries entières de la forme

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^p}{n!} x^n$$

où $p \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

2. Calculer la somme de cette série pour $0 \leqslant p \leqslant 3$.

3. Prouver que, pour tout p dans $\mathbb{N}$, il existe $P \in \mathbb{Z}_p[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} n^p = P(x) \cdot e^x.$$

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et pour tout n positif,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+2}.$$

Calculer le rayon de convergence puis la somme de

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n.$$

Exercice 5.

Raton de convergence et calcul de la somme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Exercice 6.

Etudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} u_n x^n$ où

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Calculer la somme.

Exercice 7.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et pour tout n positif,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+2}.$$

Calculer le rayon de convergence puis la somme de

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n.$$

Exercice 8.

Convergence et calcul de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}.$$

Exercice 9.

Soit $(\mathbf{E})$: $y' - 2xy = 1$.

1. Déterminer l'unique solution f de $(\mathbf{E})$ vérifiant $f(0) = 0$.

2. Développer f en série entière.

3. En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2k+1}.$$

Exercice 10.

Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction f_α définie par

$$x \longmapsto \frac{1-x^2}{x^2-2x\cos(\alpha)+1}.$$

Exercice 11.

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\sum a_n^2$ converge. On pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$$

où la variable t est réelle.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

3. On suppose que f est identiquement nulle sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est nulle.

Exercice 12.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $\forall n \geqslant 0$,

$$u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n.$$

1. Prouver l'existence d'un réel $K > 0$ tel que, pour tout entier naturel n,

$$|u_n| \leqslant K^n.$$

2. Prouver que le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{k\geqslant 0} u_k x^k$$

est non nul. On note S sa somme.

3. Calculer explicitement $S(x)$ lorsque cette expresion a un sens. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 13.

Pour tout entier naturel n non nul, on note t_n le nombre d'éléments σ de $\mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma \circ \sigma = id$ (on dit que σ est une involution).

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{t_n}{n!} x^n$$

est minoré par 1.

2. Calculer t_1, t_2 et t_3.

3. Montrer que

$$\forall n \geqslant 3,\quad t_n = t_{n-1} + (n-1)\,t_{n-2}.$$

4. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n}{n!} x^n$$

pour tout $-1 < x < 1$.

Exercice 14.

Soit $(p_n)_{n\geqslant 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels.

1. Pour $x \in [0,1[$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n}$$

Justifier cette définition.

2. On suppose la convergence de la série $\sum p_n^{-1}$. Montrer que

$$(1-x)\cdot f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$$