

Exercice 1.

Soit E l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum a_n$ soit absolument convergente. Pour tout a dans E , on note :

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

1. Etablir que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.
2. On note

$$F = \left\{ a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}$$

Le sous-ensemble F est-il :

- 2.a. une partie convexe ?
- 2.b. ouvert dans $(E, \|\cdot\|)$?
- 2.c. fermé dans $(E, \|\cdot\|)$?
- 2.d. borné dans $(E, \|\cdot\|)$?

Exercice 2.

Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Omega_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{k}{n^2} \right\}$$

Trouver une CNS portant sur k pour que

$$\Omega = \bigcup_{n \geq 1} \Omega_n$$

soit un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. Si N désigne une norme sur E , prouver que F est une partie fermée ou dense de (E, N) .
2. Donner un exemple de norme sur E pour laquelle F est une partie fermée de (E, N) , puis un exemple de norme sur E pour laquelle F est une partie dense de (E, N) .

Exercice 4.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E et

$$d_A : x \in E \mapsto \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

1. Montrer que d_A est 1-lipschitzienne.
2. Montrer que si A est convexe alors d_A est convexe.
3. On suppose ici A fermée et E de dimension finie.
- 3.a. Etablir que

$$\forall x \in E, \exists a \in A, d_A(x) = \|x - a\|$$

- 3.b. On suppose que $x \notin A$. Montrer que a appartient à la frontière de A définie par :

$$\partial A = \overline{A} \setminus A$$

4. Pour tout $x \in E$, on note

$$P(x) = \{a \in A \mid d_A(x) = \|x - a\|\}$$

Montrer que si A est convexe alors $P(x)$ est convexe.

5. Soient U un ouvert de E et K un compact non vide de E inclus dans U . Montrer l'existence de $\rho > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \forall a \in E \setminus U, \|x - a\| \geq \rho$$

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $|f'(0)| < 1$. Montrer que

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}$$

est un ouvert.

REMARQUE – f^n désigne ici les puissances pour la loi de composition des fonctions.

Exercice 6.

Soient E une evn et F un sev strict de E .

1. On suppose F de dimension finie. Montrer qu'il existe $x \in E$ de norme 1 à distance 1 de F .
2. On suppose F fermé. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $x \in E$ de norme 1 à distance supérieure ou égale à $1 - \varepsilon$ de F .

Exercice 7.

Soit $(b_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$. On suppose que $b_{n+1} \sim b_n$. Montrer que l'ensemble

$$E = \left\{ \frac{b_m}{b_n} \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2 \right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 8.

Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ suivant

$$A = \left\{ x \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (s, r) \in \mathbb{Z}^2, r \geq 2 \text{ et } \left| x - \frac{s}{r} \right| \leq \frac{1}{r^n} \right\}$$

1. Montrer que A est de *mesure nulle* i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, A est inclus dans une réunion dénombrable d'intervalles $([a_p, b_p])_{p \geq 0}$ telle que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (b_p - a_p) \leq \varepsilon$$

2. Montrer que A est dense et non dénombrable.

Exercice 9.

Montrer la densité dans $[-1, 1]$ de

$$A = \{\sin(\ell n(n)) \mid n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Exercice 10.

Soient E un evn, V et W deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . On suppose V de dimension finie. Montrer que l'application suivante

$$N : x \mapsto \inf \{ \|x + v\| \mid v \in V \}$$

définit une norme sur W .

Exercice 11.

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de deux normes N_1 et N_2 ayant des boules unité fermées égales. A-t-on $N_1 = N_2$?

Exercice 12.

Soit $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour tout polynôme $P = \sum_k p_k X^k$ de $\mathbb{C}[X]$, on pose

$$N_a(P) = \sum_k |a_k p_k|.$$

A quelle *condition nécessaire et suffisante* portant sur a l'application N_a est-elle une norme sur $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 13.

Soient E un evn, B_1 et B_2 deux boules de E telles que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Montrer que B_1 et B_2 ont le même centre et le même rayon.