

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Prouver l'équivalence des propriétés suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = +\infty$;
2. $\forall K$ compact, $f^{-1}(K)$ est compact.

Exercice 2.

Soit X un compact convexe non vide d'un evn E et f une application 1-lipschitzienne de X dans X .

1. Montrer que f admet au moins un point fixe.
2. Montrer que, si x et y sont des points fixes de f , il existe un point fixe z de f tel que

$$\|x - z\| = \|y - z\| = \frac{1}{2} \cdot \|x - y\|$$

Exercice 3.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, on appelle *point de condensation* de K tout élément x de K tel que, pour tout voisinage V de x , $V \cap K$ n'est pas au plus dénombrable. On note C_K l'ensemble des points de condensation de K .

1. Donner des exemples tels que $C_K = \emptyset$, $C_K = K$ puis $\emptyset \neq C_K \neq K$.
2. Montrer que C_K est fermé, $K \setminus C_K$ est au plus dénombrable et C_K est sans point isolé.

Exercice 4.

Soient E un evn et $\mathcal{U}$ un ouvert de E .

1. Soit $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite de fermés emboîtés telle que

$$\bigcap_{n \geq 0} F_n \subset \mathcal{U}$$

Existe-t-il un rang à partir duquel $F_n \subset \mathcal{U}$?

2. Même question avec une suite $(K_n)_{n \geq 0}$ de compacts emboîtés telle que

$$\bigcap_{n \geq 0} K_n \subset \mathcal{U}$$

Exercice 5.

Soit $u = (u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\sum u_n$ soit absolument convergente. Montrer que l'ensemble

$$K = \left\{ \sum_{n \in A} u_n \mid A \subset \mathbb{N} \right\}$$

est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

Exercice 6.

Soient E un evn, K un compact non vide de E et f une application de K dans K *faiblement contractante* i.e. telle que

$$\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe α .
2. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par

$$\begin{cases} x_0 \in K \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Montrer que $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers α .

3. Prouver que l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

est faiblement contractante. Qu'en déduire ?

Exercice 7.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n la boule fermée de centre a_n et de rayon r_n . On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} \subset B_n$.

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|a_{n+1} - a_n\| \leq r_n - r_{n+1}$$

2. Si E est un espace de Banach, montrer que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

est une boule fermée.

Exercice 8.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application continue avec $\phi \neq 1$. Montrer qu'il existe une unique fonction f dans $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que

$$\mathbf{E} \begin{cases} f(0) = \alpha \\ \forall x \in [0, 1], f'(x) = f(\phi(x)) \end{cases}$$

On pourra utiliser l'opérateur noté T défini sur l'espace $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ par

$$T(f) = g, \text{ où } g : x \in [0, 1] \mapsto \alpha + \int_0^x f(\phi(t)) dt$$

Exercice 9.

Soit X un espace métrique complet, Λ un espace métrique, f une application de $X \times \Lambda$ dans X continue et *uniformément contractante par rapport à la seconde variable*, c'est-à-dire telle qu'il existe $k \in [0, 1[$ vérifiant

$$\forall \lambda \in \Lambda, \forall (x, y) \in X^2, d(f(x, \lambda), f(y, \lambda)) \leq k \cdot d(x, y)$$

1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'équation $f(x, \lambda) = x$ admet une unique solution notée $g(\lambda)$ et que l'application $g : \Lambda \rightarrow X$ est continue. Ce résultat est appelé *théorème du point fixe avec paramètre*.

REMARQUE— On attend ici une démonstration du *théorème du point fixe*!

2. Etablir que le système

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cdot \sin(x + y) + t - 1 \\ y = \frac{1}{2} \cdot \cos(x - y) - t + \frac{1}{2} \end{cases}$$

définit une application $t \mapsto (x(t), y(t))$ continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et K un convexe compact de E qui contient $\overline{B}(0, 1)$. On suppose que K est symétrique par rapport à 0. Montrer que l'application définie par

$$\nu : E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^* \mid \frac{x}{\lambda} \in K \right\}$$

est une norme sur E .

Exercice 11.

Une application $f : E \rightarrow F$ entre deux evn E et F est dite *ouverte* (respectivement *fermée*) si l'image de tout ouvert (resp. fermé) de E par f est un ouvert (resp. fermé) de F .

1. Un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ définit-il une application fermée de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$?
2. Reprendre la question précédente en considérant une *fonction entière*, i.e. une fonction de $\mathbb{C}$ dans lui-même développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence infini.
3. Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant définit une application ouverte de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 12.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E et

$$d_A : x \in E \mapsto \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

1. Montrer que d_A est 1-lipschitzienne.
2. Montrer que si A est convexe alors d_A est convexe.
3. On suppose ici A fermée et E de dimension finie.
- 3.a. Etablir que

$$\forall x \in E, \exists a \in A, d_A(x) = \|x - a\|$$

- 3.b. On suppose que $x \notin A$. Montrer que a appartient à la *frontière* de A définie par :

$$\partial A = \overline{A} \setminus A$$

4. Pour tout $x \in E$, on note

$$P(x) = \{a \in A \mid d_A(x) = \|x - a\|\}$$

Montrer que si A est convexe alors $P(x)$ est convexe.

5. Soient U un ouvert de E et K un compact non vide de E inclus dans U . Montrer l'existence de $\rho > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \forall a \in E \setminus U, \|x - a\| \geq \rho$$

Exercice 13.

Soient E et F deux espaces de Banach.

1. Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire continue et « *presque surjective* », i.e. telle qu'il existe $C > 0$ et $0 < \alpha < 1$ tels que

$$\forall y \in F \text{ tel que } \|y\| \leq 1, \exists x \in E, \begin{cases} \|x\| \leq C \\ \|y - T(x)\| \leq \alpha \end{cases}$$

Montrer que T est surjective et plus précisément que

$$\forall y \in F \text{ tel que } \|y\| \leq 1, \exists x \in E, \begin{cases} \|x\| \leq \frac{C}{1-\alpha} \\ y = T(x) \end{cases}$$

2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}(E, F)$ des surjections linéaires et continues de E sur F est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$.

Exercice 14.

Soient E un evn.

- Démontrer qu'en dimension finie, les compacts sont exactement les fermés bornés.
- Soit F un sev de dimension finie strictement inclus dans E . Montrer qu'il existe $x \in E$ unitaire tel que $d(x, F) = 1$.
- En déduire le *théorème de Riesz* : la boule unité fermée de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

Exercice 15.

Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et δ une application de I dans $\mathbb{R}_+^*$. Une subdivision (a_i) est dite δ -fine lorsque pour tout segment $[a_i, a_{i+1}]$ de la subdivision, il existe un point x_i de ce segment tel que le segment soit inclus dans $[x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)]$.

- Montrer qu'il existe toujours une subdivision δ -fine.
- Soit F un compact de I . Montrer qu'il existe une famille finie de fermés F_i dont F est réunion et telle que, pour tout i , il existe i satisfaisant à

$$F_i \subset [x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)]$$

Exercice 16.

Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et

$$N : P \in E \mapsto N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!}$$

- Montrer que N est une norme sur E .
- Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$P_n = \sum_{k=1}^n \frac{X^{k^2}}{k^2}$$

- La suite $(P_n)_{n \geq 1}$ est-elle de Cauchy dans (E, N) ?
- En déduire que (E, N) n'est pas complet.

Exercice 17.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On note $\|\cdot\|$ la norme sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

- Prouver le *théorème de Baire* : toute réunion de fermés de E d'intérieur vide est d'intérieur vide.
- En déduire le *théorème de Banach-Steinhaus* : pour toute suite $(T_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$, on a l'équivalence des conditions suivantes :
 - pour tout $x \in E$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\| < +\infty$;
 - $(\|T_n\|)_{n \geq 0}$ est bornée.
- Une application : soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall (b_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum |b_n| < +\infty \Rightarrow \sum |a_n \cdot b_n| < +\infty$$

Etablir que $\sum |a_n| < +\infty$.

Exercice 18.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et $f \in E^*$.

- Montrer que f est continue si et seulement si $\text{Ker}(f)$ est fermé.
- On suppose $f \neq 0$ et f continue. Montrer que

$$\forall x \in E, d(x, \text{Ker}(f)) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

Quelle formule généralise-t-on ainsi ?