

Exercice 1.

Soit une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$. Prouver l'existence d'un point du graphe de f *distinct de l'origine* en lequel la tangente au graphe passe par l'origine.

Exercice 2.

Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$ telle que :

$$g(0) = g(1) = g'(0) = g'(1) = 0.$$

Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, il existe $\zeta \in]0, 1[$ tel que :

$$g(x) = \frac{g^{(4)}(\zeta)}{24} x^2 (1-x)^2$$

Exercice 3.

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, n dans $\mathbb{N}^*$ et

$$x_1 < \dots < x_n$$

des réels. On note L le polynôme interpolateur de f aux x_i , pour i variant entre 1 et n . Etablir que :

$$\forall x \in [x_1, x_n], |f(x) - L(x)| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \left| \prod_{i=1}^n (x - x_i) \right|$$

où $\|\dots\|_\infty$ désigne la norme infinie sur $[x_1, x_n]$.

Exercice 4.

Soient f, g et h trois fonctions à valeurs réelles définies et continues sur un segment $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ g(a) & g(b) & g'(c) \\ h(a) & h(b) & h'(c) \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 5.

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x) + f(x)$ admette une limite finie ℓ lorsque x tend vers $+\infty$. Etablir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

Exercice 6.

Soient f et g définies sur $[a, b]$ (avec $a < b$) à valeurs respectivement dans un evn E et $\mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ telles que :

$$\forall t \in]a, b[, \|f'(t)\| \leq g'(t)$$

Etablir que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$$

Exercice 7.

Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2 \cdot f(x) \cdot f(y)$$

Exercice 8.

Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telles que $f \circ f = f$ dans les cas suivants :

1. f est continue ;
2. f est dérivable.

Exercice 9.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, dérivable sur $[a, b]$ et telle que $f(a) = 0$. Montrer que s'il existe $\alpha \geq 0$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, on ait

$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq \alpha \cdot |f(x)|$$

alors f est identiquement nulle.

Exercice 10.

Soit f , une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x ,

$$\begin{cases} f^2(x) \leq a \\ f'^2(x) + f''^2(x) \leq a \end{cases}$$

où a est un réel strictement positif. Etablir que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^2(x) + f'^2(x) \leq a.$$

Exercice 11.

Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que

$$u'(x) = o_{+\infty} \left(\frac{u(x)}{x} \right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Que dire de $x^\varepsilon u(x)$ en $+\infty$?

Exercice 12.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f^2 + (1 + f')^2 \leq 1$. Établir que $f \equiv 0$.

Exercice 13.

On note :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x^2}.$$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Déterminer des équivalents simples de $f(x)$ en 0 et $+\infty$.

Exercice 14.

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}.$$

1. Étudier le mode de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ sur son domaine $\mathcal{D}$ de définition.
2. Étudier la continuité de la somme $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ sur $\mathcal{D}$.
3. Étudier la dérivabilité de la somme $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Exercice 15.

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n \cdot f(x)}{\sqrt{1 + n^2 \cdot f(x)^2}}$$

1. Justifier la convergence simple de

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme ?

2. Montrer que si f est continue, S aussi. Étudier la réciproque.