Exercice 1.

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1,\dots,e_n)$ une famille libre d'éléments de E. On note V le sous-espace de E engendré par cette famille et on note

$$g(e_1,\dots,e_n) = \det\Big(\big(\langle e_i \mid e_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Big)$$

1. Soit $x \in E$. Etablir que

$$d(x,V) = \sqrt{\frac{g(x,e_1,\dots,e_n)}{g(e_1,\dots,e_n)}}$$

2. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n$ des réels strictement positifs. Etablir que

$$\det\left(\left(\frac{1}{\alpha_i+\beta_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) = \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\alpha_i-\alpha_j)\cdot(\beta_i-\beta_j)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(\alpha_i+\beta_j)}$$

3. Soit $(a_n)_{n\geqslant}$ une suite de réel strictement positifs strictement croissante et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_{a_n} : x \mapsto x^{a_n}$. Etablir que la famille $\big(f_{a_n}\big)_{n\geqslant 0}$ engendre un sev W dense dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme deux *si et seulement si* la série $\sum 1/a_n$ diverge.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n\geqslant 0}$ pour que $W+\mathbb{R}\cdot 1$ soit dense dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

Exercice 2.

Calculs d'orthogonaux.

1. Soit $E=\ell^2(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel. Déterminer l'orthogonal du sev F des suites à support fini.

2. Soit $E = \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme deux usuelles. Déterminer l'orthogonal du sev G des fonctions polynomiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

3. Même question avec

$$H = \big\{f\in E \,\big|\, f|_{[0,1]} = 0\big\}$$

Exercice 3.

Soit $E=\ell^2(\mathbb{R})$ l'espace des suites de réels de carré sommable. Cet esdpace est muni de son produit scalaire usuel. On fixe α dans $]-1,1[$ et on pose, pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, $u_i = \big(\alpha^{ni}\big)_{n\geqslant 0}$.

1. Etablir que $(u_i)_{i\geqslant 1}$ est une famille libre.

2. Calculer l'orthogonal dans E du sous-espace vectoriel

$$F = \operatorname{vect}\big(u_i, i\in\mathbb{N}^*\big)$$

3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4.

On note $E=\ell^2(\mathbb{C})$ muni de son produit scalaire usuel. Pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $|\lambda|<1$, on pose $x_\lambda = (\lambda^n)_{n\geqslant 0}$.

1. Déterminer l'orthogonal de

$$F = \operatorname{vect}(x_\lambda, |\lambda|<1)$$

2. Qu'en déduire pour F ?

Exercice 5.

Existence et calcul

$$I = \iint_{[0,1]^2}\frac{dx\,dy}{1-x\cdot y}$$

Exercice 6.

Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$x \mapsto f^2(x) \cdot e^{-x}$$

soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On munit E du produit scalaire

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot g(x) \cdot e^{-x}$$

1. Vérifier que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

2. Montrer l'existence d'une base $(L_n)_{n \geqslant 0}$ de $\mathbb{R}[X]$ orthonormée et telle que, pour tout entier naturel n, L_n soit de degré n et de coefficient dominant strictement positif.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence de a_n, b_n et c_n dans $\mathbb{R}$ tels que

$$X \cdot L_n = a_n \cdot L_{n+1} + b_n \cdot L_n + c_n \cdot L_{n-1}$$

Quel est le signe de a_n ?

4. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Etablir que

$$(x - y) \cdot \sum_{i=0}^{n} L_i(x) \cdot L_i(y) = a_n \cdot \big(L_{n+1}(x) \cdot L_n(y) - L_{n+1}(y) \cdot L_n(x)\big)$$