Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique continue. On note classiquement $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ ses coefficients de Fourier.

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n}$ converge.
2. Etablir que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) f(t) dt.$$

Exercice 2.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose pour tout réel x ,

$$g(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 2x \cos(a) + x^2}.$$

En utilisant un développement en série entière de g , trouver le développement en série de Fourier de la fonction

$$y \mapsto \frac{1}{1 - (1/2) \cos(y)}.$$

Exercice 3.

Soient $\alpha > 0$ et, pour tout réel x ,

$$f(x) = \frac{1}{\cos(x) + \cosh(\alpha)}.$$

1. Développer f en série de Fourier.
2. En déduire la valeur de

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{\cos(x) + \cosh(\alpha)} dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 1-périodique. Déterminer f sachant qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ et $d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = c \cdot f(x + d)$$

Exercice 5.

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 2π -périodiques et solutions de

$$y^{(4)} + y'' + y = |\sin(x)|$$

Exercice 6.

Déterminer la suite (a_n) telle que

$$\text{pour tout } x \in [0, \frac{\pi}{2}], x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(2nx).$$

Exercice 7.

1. Former le développement en série de Fourier de la fonction 2π -périodique paire f définie par $f(x) = x$ pour $x \in [0, \pi]$.

2. Calculer les sommes des séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, 2π -périodique, telle que $f'(0) = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq 1$$

Déterminer f .

Exercice 9.

Soit $k > 0$. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodiques et de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles qu'il existe $M > 0$ tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq Mk^n.$$

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique de classe $\mathcal{C}^1$ telle que,

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0.$$

Etablir que,

$$\int_0^{2\pi} f^2(t) dt \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t) dt.$$

Etudier les cas d'égalité.

Exercice 11.

Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et f la fonction 2π -périodique qui coïncide avec la fonction

$$x \mapsto \cos(\alpha x)$$

sur $[-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f .
2. Montrer que

$$\frac{\pi \alpha}{\sin(\pi \alpha)} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}.$$

3. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Prouver que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi \alpha)}.$$

Exercice 12.

Pour tout $t > 0$, on pose

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{(k-x)^2}{2t}\right).$$

1. Montrer que f est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique.
2. On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2t}} e^{iux} dx = \sqrt{2\pi t} e^{-\frac{u^2 t}{2}}.$$

3. Calculer les coefficients de Fourier de f .
4. Pour tout $t > 0$, on pose $\theta(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\pi \frac{k^2}{t}\right)$. Déterminer une relation entre $\theta(t)$ et $\theta\left(\frac{1}{t}\right)$.

Exercice 13.

On considère

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Existe-t-il une fonction continue par morceaux et 2π -périodique dont la série de Fourier soit f ?
3. Montrer que la fonction définie par

$$g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n \cdot \sqrt{n}}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 14.

Soit $a \in]0, 1[$.

1. Soit f une fonction impaire et 2π -périodique telle que

$$\forall x \in]0, \pi[, f(x) = \sin(a \cdot x)$$

Déterminer les coefficients de Fourier de f .

2. En déduire le développement en somme de fractions rationnelles de

$$g : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \cos(u)$$