Exercice 1.

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 1-périodique. Déterminer f sachant qu'existent $c \in \mathbb{C}$ et $d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = c \cdot f(x+d)$$

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, 2π-périodique, telle que $f'(0) = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant 1$$

Déterminer f.

Exercice 3.

On considère

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

1. Donner le domaine de définition de f.

2. Existe-t-il une fonction continue par morceaux et 2π-périodique dont la série de Fourier soit f ?

3. Montrer que la fonction définie par

$$g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n \cdot \sqrt{n}}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

Exercice 4.

Morphismes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$

1. Soient $j : G \mapsto H$ un morphisme entre deux groupes abéliens et g un élément de G d'ordre fini n. Etablir que $j(g)$ est d'ordre fini et que son ordre divise n.

2. Déterminer les morphismes de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

3. Trouver une *condition nécessaire et suffisante* pour qu'il existe un morphisme *non constant* de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

4. Déterminer alors le cardinal de l'ensemble de ces morphismes.

Exercice 5.

Caractériser les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.

Exercice 6.

On pose

$$G = \left\{x + y\sqrt{3} \mid x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{Z},\ x^2 - 3y^2 = 1\right\}$$

1. Montrer que G est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$.

2. Etablir que G est monogène.

Exercice 7.

Déterminer, à isomorphisme près, les groupes commutatifs de cardinal 6.

Exercice 8.

Soit $(G,\star)$ un groupe fini d'élément neutre e et p un diviseur premier de $|G|$. On note

$$A = \left\{(x_1,\dots,x_p) \in G^p \mid x_1 \star \cdots \star x_p = e\right\}$$

et

$$\phi : \begin{array}{ccc} G^p & \longrightarrow & G^p \\ (x_1,\dots,x_p) & \longmapsto & (x_p,x_1,\dots,x_{p-1}) \end{array}$$

Pour tout $X \in G^p$, on note

$$\omega(X) = \left\{\phi^k(X) \mid k \in \mathbb{N}\right\}$$

1. Dénombrer A.

2. Dénombrer $\omega(X)$ pour tout $X \in G^p$.

3. En déduire que G contient au moins un élément d'ordre p.

Exercice 9.

Soit p un nombre premier. On note

$$Z_p = \{a/b \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \text{ et } p \nmid b\}$$

et

$$J_p = \{a/b \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, p \mid a \text{ et } p \nmid b\}.$$

1. Montrer que Z_p est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

2. Montrer que J_p est un idéal de Z_p.

3. Etablir que tout idéal de Z_p autre que Z_p est inclus dans J_p.

4. Déterminer les idéaux de Z_p.

Exercice 10.

Soit A un anneau commutatif tel que, pour tout idéal I de A et pour tout $(x,y) \in A^2$, on ait

$$xy \in I \Longrightarrow x \in I \text{ ou } y \in I.$$

Montrer que A est un corps.

Exercice 11.

Soit D l'anneau des nombres décimaux

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \,;\, \exists n \in \mathbb{Z} \;/\; 10^n x \in \mathbb{Z}\}.$$

Montrer que tous les idéaux de D sont principaux.

Exercice 12.

Soit A un anneau commutatif, on appelle *radical* d'un idéal I de A l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{x \in A \,;\, \exists n \in \mathbb{N} \;/\; x^n \in I\}.$$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.

2. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

3. Montrer que si I et J sont deux idéaux alors on a

$$\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J} \quad \text{et} \quad \sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}.$$

Exercice 13.

Soit A un anneau commutatif, on dit que $a \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$.

1. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal.

2. Déterminer l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $n \geqslant 2$.

3. Donner un exemple d'anneau non commutatif dans lequel l'ensemble des éléments nilpotents n'est pas un idéal.

Exercice 14.

Soit A un anneau tel que

$$\forall x \in A, \quad x^3 = x.$$

1. Montrer que $\forall x \in A, \quad 6x = 0$.

2. Soient

$$A_2 = \{x \in A \mid 2x = 0\} \text{ et } A_3 = \{x \in A \mid 3x = 0\}.$$

Etablir que $A = A_2 + A_3$.

3. On souhaite établir que A est commutatif.

3.a. En déduire que $\forall x \in A_2, \quad x^2 = x$.

3.b. Montrer que les éléments de A_2 commutent.

3.c. Etablir que les éléments de A_3 commutent.

3.d. Conclure.

Exercice 15.

Soient K un corps et $A = K \times K$.

1. Rappeler la structure canonique d'anneau de A.

2. L'anneau A est-il un corps ?

3. Déterminer les idéaux de A.