Exercice 1.

Soient A, B et C trois sev d'un $\mathbb{K}$-ev E. On note

$$F = (A \cap B) + (A \cap C), \quad G = A \cap (B + (A \cap C))$$

et $H = A \cap (B + C)$.

1. Montrer que F et G sont des sev de H.

2. Etablir que $F = G$.

3. A-t-on toujours $F = G = H$?

Exercice 2.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et S un système de n vecteurs de rang s. On extrait de S un système S' de r vecteurs de rang s'. Etablir que

$$s' \geqslant r + s - n.$$

Exercice 3.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

1. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, établir par des arguments topologiques que E n'est pas réunion dénombrable de sev stricts.

2. Lorsque $\mathbb{K}$ est infini non dénombrable, établir que E n'est pas réunion dénombrable de sev stricts.

Exercice 4.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun dans E *si et seulement si* $\dim(F) = \dim(G)$.

Exercice 5.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}^n$, $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille libre de E et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k.$$

Donner une *condition nécessaire et suffisante* sur les α_i pour que $(y + x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ soit une famille libre.

Exercice 6.

Soient n un entier naturel non nul et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$E = \left\{X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid X + {}^t X = 2\,\mathrm{tr}(X) A\right\}.$$

1. Prouver que E est un espace vectoriel.

2. Quelle est la dimension de E ?

Exercice 7.

Soient $n \geqslant 1$, A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les matrices $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ solutions de l'équation

$$X + \mathrm{tr}(X) A = B.$$

Exercice 8.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice U appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AUA = A$.

Exercice 9.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Etablir que $\mathrm{tr}(A) = 0$ *si et seulement si* A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 10.

Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $M \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de M en fonction de ceux de A et B.

2. En cas d'inversibilité, exprimer l'inverse de M en fonction de A et B.

Exercice 11.

Soient A, B, C et D appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right).$$

On suppose que $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Etablir que

$$\mathrm{rg}(M) = n \ \textit{ si et seulement si } \ D = CA^{-1}B.$$

Exercice 12.

Soit $(u, v) \in (\mathscr{L}(E))^2$, tels que $u^2 = u$ et $v \circ u = 0$. Montrer que
$$\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v).$$

Exercice 13.

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Etablir que la suite
$$(\mathrm{rg}(u^k) - \mathrm{rg}(u^{k+1}))_{k\in\mathbb{N}}$$
est décroissante.

Exercice 14.

Soient $\mathbb{K}$ un corps infini non dénombrable, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout x dans E, on note
$$E_x = \left\{P(f)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\right\} \quad \text{et} \quad f_x = f|_{E_x}^{E_x}.$$

1. Etablir que E n'est pas réunion dénombrable de sev stricts.

2. Vérifier que $\mu_{f_x} | \mu_f$.

3. En déduire l'existence de $x \in E$ tel que $\mu_{f_x} = \mu_f$.

4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Etablir que la famille $(id_E, f, \ldots, f^{p-1})$ est liée *si et seulement si*
$$\forall x \in E, \quad (x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)) \text{ est liée.}$$

Exercice 15.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$. Etablir qu'il n'existe qu'un nombre fini de sev de E de la forme
$$\mathrm{Ker}(P(f)) \quad \text{ou} \quad \mathrm{Im}(P(f))$$
avec $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 16.

Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On note μ_f (resp. χ_f) le polynôme minimal (resp. caractéristique) de f. Pour tout x dans E, on note
$$E_x = \left\{P(f)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\right\} \quad \text{et} \quad f_x = f|_{E_x}^{E_x}.$$

On va établir de deux manière l'existence de $x_0 \in E$ tel que $\mu_{f_{x_0}} = \mu_f$.

1. Par un lemme sur les réunions au plus dénombrables de sev stricts dans le cas où $\mathbb{K}$ est inifini non dénombrable.

1.a. Etablir que E n'est pas réunion dénombrable de sev stricts.

1.b. Vérifier que $\mu_{f_x} | \mu_f$.

1.c. En déduire l'existence de $x_0 \in E$ tel que $\mu_{f_{x_0}} = \mu_f$.

2. Par l'arithmétique dans le cas général.

2.a. On note $\mu_f = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_r^{\alpha_r}$ la décomposition de μ_f en produit de puissances d'irréductibles sur $\mathbb{K}$. Justifier que $E_i = \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(f))$ est non nul pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$.

2.b. Justifier l'existence de $x_i \in E_i$ tel que $\mu_{f_{x_i}} = P_i^{\alpha_i}$.

2.c. On pose $x_0 = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$. Vérifier que $\mu_{f_{x_0}} = \mu_f$.