Exercice 1.

Diagonaliser la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \text{ ou } i = 1 \text{ ou } j = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exercice 2.

Déterminer une *condition nécessaire et suffisante* sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour qu'il existe $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\operatorname{tr}(M) = 0 \quad \text{et} \quad M^3 - M^2 - M - 2I_n = 0.$$

Exercice 3.

Soient $0 < a_1 < \ldots < a_n$ et

$$M = \begin{bmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & 0 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & 0 & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Prouver que λ est valeur propre de M *si et seulement si*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + \lambda} = 1.$$

2. M est-elle diagonalisable ?

Exercice 4.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, M_n la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $1, 2, \ldots, n$, et les autres coefficients tous égaux à 1. On note P_n le polynôme caractéristique de M_n.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$P_{n+1}(X) = (n-X)\cdot P_n(X) + (-1)^n \cdot X \cdot (X-1)\cdots(X-n+1)$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et tout entier naturel $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $(-1)^k \cdot P_n(k) > 0$.

3. En déduire que M_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

Une CNS de diagonalisabilité

1. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)$ une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p}$ des réels et $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 2p}$ la matrice de $\mathfrak{M}_{2p}(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i + j = 2p + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & a/n \\ -a/n & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$z_n = \left(1 + i\frac{\alpha}{n}\right)^n.$$

Etablir que

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = e^{i\alpha}.$$

2. Etudier la limite de A_n^n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ n'ayant aucune valeur propre en commun.

1. On note χ_A le polynôme caractéristique de A. Etablir que $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C})$.

2. Soit $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX = XB$. Montrer que $X = 0$.

3. Démontrer que

$$\forall Y \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ Y = AX - XB.$$

Exercice 8.

Soient u et v dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ digonalisables tels que $u^3 = v^3$.

1. Montrer que $u = v$.

2. A-t-on la même conclusion si $u^2 = v^2$?

3. Généraliser ce résultat au cas $u^{2m+1} = v^{2m+1}$.

Exercice 9.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ à valeurs propres complexes de module majoré par 1. Montrer que les valeurs propres de A sont des racines de l'unité et que A est diagonalisable.

Exercice 10.

Soient a un réel non nul et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. f est il diagonalisable sur $\mathbb{R}$, trigonalisable sur $\mathbb{R}$?

2. Trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f soit égale à

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. On se propose de généraliser cette étude en considérant, pour $n \geqslant 2$, les matrices de la forme

$$A_n = \begin{pmatrix} -1 & a & a & \dots & a \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ (-1)^n & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

3.a. Etudier le cas où $a = 0$ (diagonalisabilité ou, à défaut, trigonalisabilité, comment obtenir une matrice de passage).

3.b. Etudier le cas où $a \neq 0$.

Exercice 11.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Etablir que A est nilpotente *si et seulement si*

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \mathrm{tr}(A^i) = 0$$

2. On suppose que

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n-1, \quad \mathrm{tr}(A^i) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(A^n) \neq 0$$

Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et inversible.

3. On suppose que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid A + \lambda B \text{ est nilpotente}\}$$

contient au moins $n+1$ éléments. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Exercice 12.

Pour toute matrice A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on note $S(A)$ la classe de similitude de A.

1. Etablir que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ *si et seulement si* $S(A)$ est fermée.

2. Si A est diagonalisable, $S(A)$ est-elle compacte ?

3. Si A est inversible, montrer que $\overline{S(A)} \subset GL_n(\mathbb{C})$.

4. Montrer que A est nilpotente *si et seulement si* $\mathbb{O} \in \overline{S(A)}$.

Exercice 13.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de diagonale nulle et dont, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, les termes de la j-ème colonne autres que le terme diagonal sont tous égaux à j.

1. Ecrire une procédure `A(n)` prenant en argument $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoyant la matrice A_n.

2. Calculer les valeurs propres de A_n pour $n \in \{2, 3, 4, 10\}$.

3. Montrer que les valeurs propres de A_n sont les solutions de l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x+k} = 1$$

4. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

5. Soit $n \geqslant 2$. On note x_n l'unique valeur propre de A_n appartenant à $]-2, -1[$. Etudier la monotonie et la convergence de $(x_n)_{n\geqslant 2}$.

6. Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n.