Exercice 1.

Soient E un espace euclidien et p une projection de E. Etablir l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. p est orthogonale ;

2. $\forall x, y \in E,\ \langle p(x)|y\rangle = \langle x|p(y)\rangle$;

3. $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 2.

L'espace $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et

$$E = \left\{\|AX - B\| \;\middle|\; X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right\}.$$

1. Montrer que E possède un plus petit élément réalisé pour un vecteur X_0. Y-a-til unicité de X_0 ?

2. Montrer que ${}^tAAX_0 = {}^tAB$.

3. Vérifier que $\mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(A)$.

4. En déduire, lorsque $\mathrm{rg}(A) = n$, une expression de X_0 puis de $\min(E)$ en fonction de B et A.

Exercice 3.

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$u^* \circ u + \alpha u + \beta u^* = 0.$$

1. On suppose $\alpha \neq \beta$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et p un projecteur orthogonal de E tels que $u = \lambda p$.

2. On suppose $\alpha = \beta$. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont orthogonaux.

Exercice 4.

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. Prouver l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. $\langle x|y\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle u(x)|u(y)\rangle = 0$;

2. $\exists k \geqslant 0,\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| = k\|x\|$;

3. u est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Exercice 5.

$E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

1. Soient $x \neq y$ et $0 < \lambda < 1$. Etablir que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

2. Soit $g : x \in E \mapsto f(x) - f(0)$.

2.a. Vérifier que

$$\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

2.b. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ g(x + y) = g(x) + g(y).$$

3. Que dire de f ?

Exercice 6.

Soient E un espace euclidien orienté de dimension trois, $a \in E$ non nul et $f : x \in E \mapsto a \wedge x$. Déterminer $\exp(f)$.

Exercice 7.

Soit $M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathbb{I}_n + M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$A = (\mathbb{I}_n - M)(\mathbb{I}_n + M)^{-1} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 8.

Soit $M = \left(m_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $O_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left|\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{i,j}| \leqslant n^{3/2}$$

Exercice 9.

Résoudre dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation :

$${}^tXX\,{}^tX = I_n.$$

Exercice 10.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire euclidien canonique $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Déterminer

$$\delta = \min_{X\in S}\langle AX|X\rangle\langle A^{-1}X|X\rangle$$

où $S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X\| = 1\}$.

Exercice 11.

Résoudre dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation :

$${}^tXX{}^tX = I_n.$$

Exercice 12.

Soient $A \in \mathscr{S}^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$S = AB + BA \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Montrer que $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 13.

L'objectif de cet exercice est d'établir l'inégalité d'Hadamard : pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, on a :

$$\det(A) \leqslant \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Etablir que

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n,\ \ a_{i,i} > 0.$$

2. Soit $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Prouver que :

$$\det(B) \leqslant \left(\frac{\operatorname{tr}(B)}{n}\right)^n.$$

3. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant$, on pose :

$$b_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{\sqrt{a_{i,i}a_{j,j}}}.$$

3.a. Justifier l'existence de $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

3.b. Montrer que B est symétrique positive.

4. En déduire l'inégalité d'Hadamard.

Exercice 14.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $P \in E$, on pose $D(P) = P'' - 2XP'$. Pour tous $P, Q \in E$, on note

$$\langle P|Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt.$$

1. Vérifier que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. Montrer que D est diagonalisable. On précisera ses valeurs propres.

3. Montrer que D est symétrique pour $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

4. Montrer que l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de E diagonalise D.

Exercice 15.

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E,\ \ \|u(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Etablir que

$$E = \operatorname{Ker}(u - id_E) \oplus \operatorname{Im}(u - id_E).$$

Exercice 16.

Soient $n \geqslant 2$ un entier naturel, E un espace euclidien et $f = (f_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E telle que

$$\forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,\ \ \langle f_i, f_j\rangle < 0.$$

Prouver que $\operatorname{rg}(f) \geqslant n - 1$.

Exercice 17.

Soient E un espace euclidien et S une partie de E telle que

$$\forall (u,v) \in S^2,\ \ u \neq v\ \Rightarrow\ \langle u|v\rangle = -1.$$

1. Etablir que S est finie.

2. Montrer que

$$\sum_{u\in S}\frac{1}{1+\|u\|^2} \leqslant 1.$$