Exercice 1.

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $\alpha \in]0,\pi[$. On considère $n+1$ vecteurs $u_1,\dots,u_{n+1}$ de E faisant deux à deux un angle α.

1. Déterminer α lorsque $n=2$.

2. Déterminer α dans le cas général et calculer

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{u_i}{\|u_i\|}$$

3. Montrer l'existence d'une telle famille.

Exercice 2.

Soient a,b,c des réels et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est une matrice de rotation *si et seulement si* a,b et c sont les racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + \alpha$ où α est à préciser.

2. Indiquer les caractéristiques de la rotation de matrice A dans la base canonique.

Exercice 3.

Soient E un espace euclidien orienté de dimension trois, $a \in E$ non nul et $f : x \in E \mapsto a \wedge x$. Déterminer $\exp(f)$.

Exercice 4.

Soit E un espace euclidien de dimension trois orienté et $u \in E$ unitaire. Soit

$$f : x \in E \mapsto f(x) = \langle x|u\rangle \cdot u + u \wedge x$$

1. Montrer que f est une isométrie de E.

2. Caractériser f.

3. Déterminer les isométries g telles que $g^2 = f$.

Exercice 5.

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in SO_3(\mathbb{R})$. Simplifier

$$\delta(A) = (1-\operatorname{tr}(A))^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} (a_{i,j} - a_{j,i})^2$$

Exercice 6.

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} \phi :\ (\mathbb{R}^n)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X,Y) &\longmapsto -\det\begin{pmatrix} A & X \\ {}^tY & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$.

2. A quelle condition nécessaire et suffisante ϕ définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?

3. On pose

$$A = \frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} 11 & 5 & -4 \\ 5 & 11 & -4 \\ -4 & -4 & 20 \end{pmatrix}$$

3.a. Montrer que ϕ est un produit scalaire.

3.b. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale pour ϕ sur le plan d'équation $2x+y-z=0$.

Exercice 7.

Soit S une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels, symétrique définie positive. Montrer que l'application

$$q : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ x_n & & & \end{vmatrix}$$

est une forme quadratique définie négative sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8.

On considère sur $\mathbb{R}^n$ la forme quadratique

$$q(x) = \alpha\cdot\|x\|^2 + \beta\cdot\langle x|a\rangle^2$$

où $\alpha > 0$, β réel et $a \in \mathbb{R}^n$. Déterminer une cns pour que q soit définie positive.

Exercice 9.

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que ${}^tA\cdot A$ est la matrice d'une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^p$.

2. Déterminer sa signature en fonction de $\operatorname{rg}(A)$.

Exercice 10.

On note $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^2$. Montrer l'existence d'une base (u, v) de $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad q(x, y) = \|xu + yv\|^2$$

2. On note ε la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Etablir que

$$\det_{\varepsilon}^2(u, v) = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u|v\rangle^2$$

3. Soient (u, v) une base de $\mathbb{R}^2$ et $G = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$.

3.a. Montrer que la distance de 0 à $G \setminus \{0\}$ est réalisée en au moins un vecteur de X de G.

3.b. Etablir l'existence de $Y \in \mathbb{R}^2$ tel que $G = \mathbb{Z}X + \mathbb{Z}Y$.

Exercice 11.

Soient E un espace euclidien de produit scalaire noté $\langle\cdot|\cdot\rangle$, a et b deux vecteurs de E et

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle x|a\rangle \cdot \langle x|b\rangle \end{aligned}$$

1. Quelle est la nature de φ ?

2. Donner les extrema de φ sur la boule unité de E.

Exercice 12.

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur E, q_1 étant définie positive. On note $E^* = E \setminus \{0\}$ et on pose

$$\begin{aligned} f : E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{q_2(x)}{q_1(x)} \end{aligned}$$

On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, A_1 et A_2 les matrices dans $\mathscr{B}$ des formes bilinéaires respectivement associées à q_1 et q_2.

1. Quelle est la nature de $f(E^*)$?

2. On note $\langle\cdot|\cdot\rangle_1$ le produit scalaire défini par q_1, u l'endomorphisme symétrique associé à q_2 pour ce produit scalaire. Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$.

3. Décrire $f(E^*)$ au moyen du spectre de M.

4. Application numérique : calculer $f(E^*)$ dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$ euclidien canonique et

$$\begin{cases} q_1(x, y) &= x^2 + y^2 + xy \\ q_2(x, y) &= x^2 - 2xy + y^2 \end{cases}$$