Exercice 1.

On considère l'evn $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme

$$\|P\| = \left(\int_0^1 P^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ainsi que l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(P) = \int_0^1 \sin(tP(t))\,dt.$$

Montrer que f est différentiable en tout point de E et exprimer sa différentielle en tout point de E.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en 0 et telle que l'on ait $f(tx) = tf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non nul et tout $t > 0$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 3.

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : \overline{\mathscr{U}} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\mathscr{U}}$, différentiable sur $\mathscr{U}$ et telle que f soit constante sur $\overline{\mathscr{U}} \setminus \mathscr{U}$. Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{U}$ tel que $df_u = 0$.

Exercice 4.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$f : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ M & \longmapsto & \left(\mathrm{tr}(M), \mathrm{tr}\left(M^2\right), \dots, \mathrm{tr}\left(M^n\right)\right) \end{array}$$

1. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer df_M pour tout $M \in E$.

2. Montrer que, pour tout $M \in E$,

$$\mathrm{rg}(df_M) = \deg(\mu_M)$$

où μ_M désigne le polynôme minimal de la matrice M.

3. Etablir que

$$\Omega = \{M \in E \mid \chi_M = \mu_M\}$$

est un ouvert de E.

Exercice 5.

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^p$ avec $p \geqslant 1$ telle que $f(0) = 0$. On suppose que $f'(x)$ est une isométrie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Le but de l'exercice est d'établir que f est une isométrie.

1. On suppose dans cette question que $p \geqslant 2$. Prouver le résultat. On pourra dériver par rapport à x dans l'égalité suivante :

$$\forall (x,h,k) \in E^3,\ \langle f'(x)\cdot h | f'(x)\cdot k\rangle = \langle h|k\rangle.$$

2. On suppose dans question que $p = 1$.

2.a. Soit $a \in E$. Montrer l'existence d'un voisinage V de a tel que

$$\forall (x,y) \in V^2,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

2.b. En déduire que

$$\forall (x,y) \in V^2,\ \forall (h,k) \in E^2,\ \langle f'(x)\cdot h | f'(y)\cdot k\rangle = \langle h|k\rangle.$$

2.c. Etablir que f' est constante sur V.

2.d. Conclure.

Exercice 6.

On note $\mathscr{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Trouver toutes les applications $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que l'application $F : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathscr{U},\ F(x,y) = f\left(\frac{\cos x}{\cosh y}\right)$$

soit de laplacien nul.

Exercice 7.

On note f l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x.$$

On pose

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

et

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leqslant 1\}.$$

1. Représenter graphiquement les ensembles D et H.

2. Rechercher les extrema globaux et locaux de f sur D.

3. La fonction f admet-elle un maximum sur H ?

4. Déterminer les extrema locaux et globaux de f sur H.

Exercice 8.

Soient E un espace euclidien de norme notée $\|\cdot\|$ et

$$f : \begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{\|x\|^2} \end{array}$$

Montrer que f est différentiable et reconnaître $df(x)$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Exercice 9.

Etude de la différentiabilité de quelques normes.

1. Dans cette question E désigne un evn de norme notée $\|\cdot\|$. Montrer que $\|\cdot\|$ n'est pas différentiable en 0.

2. Dans cette question $E = \mathbb{R}^n$. Etudier la différentiabilité des normes $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et plus généralement de $\|\cdot\|_p$ où $p > 1$.

Exercice 10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver la différentiabilité et déterminer la différentielle de

$$f : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array}$$

Exercice 11.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = GL_n(\mathbb{R})$ et

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & {}^t\mathrm{com}(M) \end{array}$$

1. Montrer que f réalise en tout point A de E un $\mathscr{C}^\infty$ - difféomorphisme d'un voisinage de V_A de A dans E sur un voisinage $V_{f(A)}$ de $f(A)$ dans M.

2. f réalise-t-elle un $\mathscr{C}^\infty$ - difféomorphisme de E sur E ?

Exercice 12.

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure canonique d'espace euclidien. Soient a et b deux points distincts de $\mathbb{R}^n$. Déterminer les points critiques de l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x-a\| + \|x-b\| \end{array}$$

Exercice 13.

Déterminer l'aire maximale d'un triangle dont les sommets appartiennent à une ellipse fixée.

Exercice 14.

Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, on note $J'(x)$ le gradient de J en x

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1.a. $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\langle J'(u) - J'(v) | u - v \rangle \geqslant \alpha \|u - v\|^2.$$

1.b. $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$J(u) \geqslant J(v) + \frac{\alpha}{2} \cdot \|u - v\|^2 + \langle J'(v) | u - v \rangle.$$

2. On suppose que J vérifie les conditions de la question précédente et on considère un convexe fermé K de $\mathbb{R}^n$, on note J_K la restriction de J à K.

2.a. Montrer que

$$\inf_{u \in K} J_K(u)$$

existe et que cette borne inférieure est atteinte.

2.b. Montrer que $u_0 \in K$ réalise le minimum de J_K sur K si et seulement si

$$\forall u \in K, \ \langle J'_K(u_0) | u - u_0 \rangle \geqslant 0.$$