Exercice 1.

Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$(\mathbf{E})\ :\ y' = |y - x|$$

Exercice 2.

Soit

$$(\mathbf{E})\ :\ y' = x\sin(y) + \frac{y}{x}$$

avec la condition de Cauchy $y(x_0) = y_0$ où $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

1. Montrer que la solution existe et qu'elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Peut-elle prendre des valeurs négatives ?

3. Montrer qu'il existe des solutions de (**E**) bornées.

Exercice 3.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(\mathbf{E})\ :\ y' = |y|.$$

Exercice 4.

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ de l'équation

$$(\mathbf{E})\ :\ \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y' & y'' & y \\ y'' & y & y' \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 5.

Décrire les orbites de

$$y' = \sin(y).$$

Exercice 6.

Décrire les orbites de

$$y' = \sqrt{1 - y^2}.$$

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant

$$f' = f^2 - f^6 \quad \text{et} \quad f(0) > 0.$$

Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

Exercice 8.

Soit

$$(\mathbf{E})\ :\ y' = \sin(xy).$$

1. Montrer que, pour tout $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, la solution maximale de (**E**) vérifiant le problème de Cauchy $y(x_0) = y_0$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que toutes les solutions de (**E**) sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.

Décrire les orbites de

$$y' = y^2.$$

Exercice 10.

Décrire les orbites de

$$y' = (1 - y)y.$$

Exercice 11.

Pour tout réel x, on pose

$$\phi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt}$$

1. Etablir que $\phi(x) > x$ pour tout réel x.

2. Montrer que ϕ est dérivable et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \phi'(x) = \phi(x)\cdot\big(\phi(x) - x\big)$$

3. Montrer que ϕ est deux fois dérivable et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \phi''(x) = \phi(x)\cdot\big(2\cdot\phi(x)^2 - 3\cdot x\cdot\phi(x) + x^2 - 1\big)$$

4. Montrer que ϕ est convexe sur $]-\infty, -1]$.

5. Etablir la convexité de ϕ sur $\mathbb{R}$.