Exercice 1.

Soient E un evn et F un sev strict de E .

1. On suppose F de dimension finie. Montrer qu'il existe $x \in E$ de norme 1 à distance 1 de F .
2. On suppose F fermé. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $x \in E$ de norme 1 à distance supérieure ou égale à $1 - \varepsilon$ de F . Peut-on trouver un élément x unitaire tel que $d(x, F) = 1 - \varepsilon$?

Exercice 2.

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exp(f(z)) = z ?$$

Exercice 5.

Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et

$$\Omega_{p,q} = \left\{ (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^{p+q} \mid x_1^2 + \dots + x_p^2 - y_1^2 - \dots - y_q^2 = 0 \right\}$$

1. $\Omega_{p,q}$ est-il connexe par arcs ?
2. $\Omega_{p,q} \setminus \{0\}$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 6.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\Omega = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \mid \text{Ker}(f) \not\subset \text{Im}(f)\}$$

1. Etablir que Ω connexe par arcs.
2. Déterminer $\overline{\Omega}$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et injective. Prouver que f est strictement monotone. On pourra considérer

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y)^2 \mapsto f(x) - f(y)$$

Exercice 4.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et $f \in E^*$.

1. Montrer que f est continue *si et seulement si* $\text{Ker}(f)$ est fermé.
2. Soit H un hyperplan de E . Etablir que $E \setminus H$ est connexe *si et seulement si* H n'est pas fermé.

Exercice 7.

Soient E un evn.

1. Démontrer qu'en dimension finie, les compacts sont exactement les fermés bornés.
2. Soit F un sev de dimension finie strictement inclus dans E . Montrer qu'il existe $x \in E$ unitaire tel que $d(x, F) = 1$.
3. En déduire le *théorème de Riesz* : la boule unité fermée de E est compacte *si et seulement si* E est de dimension finie.

Exercice 8.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E et

$$d_A : x \in E \mapsto \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

1. Montrer que d_A est 1-lipschitzienne.
2. Montrer que si A est convexe alors d_A est convexe.
3. On suppose ici A fermée et E de dimension finie.
- 3.a. Etablir que

$$\forall x \in E, \exists a \in A, d_A(x) = \|x - a\|$$

- 3.b. On suppose que $x \notin A$. Montrer que a appartient à la *frontière* de A définie par :

$$\partial A = \overline{A} \setminus A$$

4. Pour tout $x \in E$, on note

$$P(x) = \{a \in A \mid d_A(x) = \|x - a\|\}$$

Montrer que si A est convexe alors $P(x)$ est convexe.

5. Soient U un ouvert de E et K un compact non vide de E inclus dans U . Montrer l'existence de $\rho > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \forall a \in E \setminus U, \|x - a\| \geq \rho$$