

Exercice 1.

Soient E et F deux espaces de Banach.

1. Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire continue et « *presque surjective* », i.e. telle qu'il existe $C > 0$ et $0 < \alpha < 1$ tels que

$$\forall y \in F \text{ tel que } \|y\| \leq 1, \exists x \in E, \begin{cases} \|x\| \leq C \\ \|y - T(x)\| \leq \alpha \end{cases}$$

Montrer que T est surjective et plus précisément que

$$\forall y \in F \text{ tel que } \|y\| \leq 1, \exists x \in E, \begin{cases} \|x\| \leq \frac{C}{1-\alpha} \\ y = T(x) \end{cases}$$

2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}(E, F)$ des surjections linéaires et continues de E sur F est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$.

Exercice 2.

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|$.

1. On définit l'endomorphisme T de E par la formule

$$T(x)(t) = \int_0^t x(s) ds$$

1.a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in E$ et $t \in [0, 1]$, exprimer $T^n(x)(t)$ sous la forme d'une intégrale simple sur le segment $[0, t]$.

1.b. Soit $g \in E$. Montrer que l'équation $x - T(x) = g$ admet une unique solution x dans E .

2. On définit l'application S de E dans E par la formule

$$S(x)(t) = \int_0^t x^2(s) ds$$

2.a. Soit $g \in E$. Montrer que l'équation $x - T(x) = g$ admet au plus une solution x dans E .

2.b. Soit $g \in E$. L'équation $x - T(x) = g$ possède-t-elle toujours une solution dans E ?

Exercice 3.

On note

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \right\}$$

et on munit F de la norme infinie $\|\cdot\|$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer l'existence d'une suite de polynômes $(P_n)_{n \geq 0}$ vérifiant $P_n(0) = 0$ pour tout entier naturel n et convergeant uniformément vers f sur $[0, 1]$.

2. Montrer que

$$\text{vect} \left(\begin{array}{c} e_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-nx} \end{array} \mid n \in \mathbb{N}^* \right)$$

est dense dans $(F, \|\cdot\|)$.

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-x} \cdot \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot x^k \end{aligned}$$

Etablir que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

4. En déduire que

$$G = \text{vect} \left(\begin{array}{c} e_P : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} \cdot P(x) \end{array} \mid P \in \mathbb{R}[X] \right)$$

est dense dans $(F, \|\cdot\|)$.