TP Maple 6 | Séries de Fourier

Les séries de Fourier sont un outil d'analyse et de synthèse des signaux périodiques. Contrairement à la transformée intégrale de Fourier, il n'existe aucune bibliothèque sous Maple permettant la manipulation des séries de Fourier. Il faudra commencer par écrire des procédures calculant les coefficients et la série de Fourier d'une fonction donnée.

1. Construction d'un signal périodique

On appellera signal périodique toute fonction périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dans la pratique, on définira une fonction T-périodique f, « *le signal* », en translatant une infinité de fois (de $n \cdot T \cdot \overrightarrow{\imath}$ pour n décrivant $\mathbb{Z}$) la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ d'une fonction $g : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}$. Nous appellerons cette application g « *le motif* ». Nous écrirons à chaque fois des programmes universels, valables pour des motifs et des périodes T quelconques. Il est important de représenter graphiquement le signal dont on étudie la série de Fourier car le mode de convergence de cette série dépend de la régularité du signal.

Considérons l'exemple célèbre de *dent de scie* : f est l'unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ coïncidant avec le motif suivant sur $[0, 2\pi[$:

$$\text{scie (t)} = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \dfrac{\pi - t}{2} & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

On commence par définir la période T, l'origine t_0 de l'intervalle de définition du motif, le motif puis le signal :

```
> T:=2*Pi: t0:=0:
  motif:=piecewise(t<>0,(Pi-t)/2,0):
  signal:=subs(t=t-floor((t-t0)/T)*T,motif):
```

Rappelons que la commande `piecewise` permet de définir une fonction par morceaux. On retiendra la syntaxe suivante pour définir une fonction f valant f_i si la condition cond_i est vérifiée (i variant de 1 à n) et valant f_{sinon} dans les autres cas [1].

La commande `piecewise` de définition « *par morceaux* »

$$f := x \text{->} \mathbf{piecewise}(\mathrm{cond}_1,\ f_1,\ \mathrm{cond}_2,\ f_2,\ \ldots,\ \mathrm{cond}_n,\ f_n,\ f_{\text{sinon}})$$

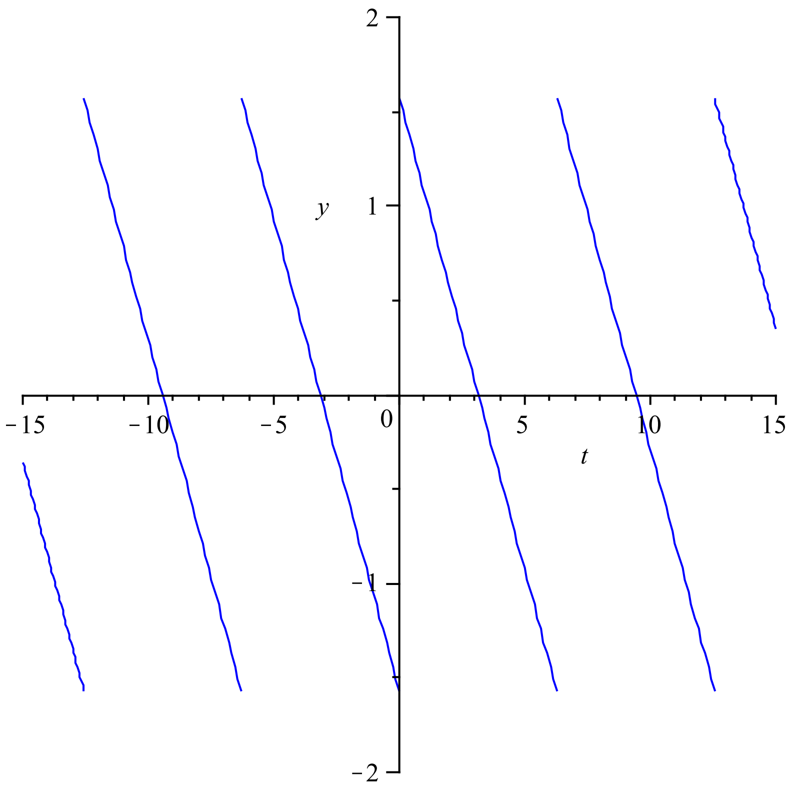
Attention, la commande **piecewise** ne définit qu'une expression ! On retiendra également que les conditions $cond_i$ sont testées successivement dans l'ordre croissant des indices [2].

Ajoutons que l'on calcule une partie entière au moyen de la commande `floor`.

En utilisant `floor` et `piecewise` ont peut donc définir un motif et sa réplication en un signal. Pour tout nombre réel t, le nombre $t - \left\lfloor \frac{t-t_0}{T} \right\rfloor \cdot T$ est l'unique réel de l'intervalle $[t_0, t_0 + T[$ égal à t modulo T. En effet, comme $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$, on a

$$t_0 = t - \frac{t-t_0}{T} \cdot T \leqslant t - \left\lfloor \frac{t-t_0}{T} \right\rfloor \cdot T < t - \left(\frac{t-t_0}{T} - T \right) \cdot T = t_0 + T \quad \text{et} \quad f\left(t - \left\lfloor \frac{t-t_0}{T} \right\rfloor \cdot T \right) = f(t)$$

```
> plot(signal,t=-15..15,color=blue,discont=true,y=-2..2);
```



1. La valeur par défaut de f_{sinon} est zéro.
2. Ce qui permet de définir une fonction par morceaux d'une autre manière qu'en mathématiques (où l'on utilise une partition de l'ensemble de définition pour définir une fonction par morceaux).

Le signal est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, clairement continu en tout point de $\mathbb{R}$ privé des nombres de la forme $2 \cdot \pi \cdot n$, où $n \in \mathbb{Z}$. En ces points, le signal f vérifie

$$\frac{f(2\cdot n\cdot\pi-)+f(2\cdot n\cdot\pi+)}{2} = \frac{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{2} = f(2\cdot n\cdot\pi) = f(0) = 0$$

Le signal en donc continu en $2\cdot n\cdot\pi$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On pourra appliquer le théorème de Dirichlet : la série de Fourier de la *dent de scie* converge simplement vers le signal sur $\mathbb{R}$.

2. Coefficients et série de Fourier d'un signal

On pourra calculer les coefficients de Fourier *complexes* $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$\forall n \in \mathbb{Z},\quad c_n = \frac{1}{T}\cdot\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-2in\pi t/T}$$

ou *réels* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\cdot\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\cos\left(\dfrac{2\cdot\pi\cdot n\cdot t}{T}\right)dt \\[2ex] b_n = \dfrac{2}{T}\cdot\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\sin\left(\dfrac{2\cdot\pi\cdot n\cdot t}{T}\right)dt \end{cases}$$

Reprenons l'exemple de la dent de scie :

```
> assume(n,integer):
  a,b:=2*(int(motif*cos(n*t),t=t0..t0+T))/T,
  2*(int(motif*sin(n*t),t=t0..t0+T))/T;
```

$$a, b := 0,\ \frac{1}{n}$$

La dent de scie étant impaire, la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est nulle. Sa série de Fourier est donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\cdot t)}{n}$$

Exercice 1.

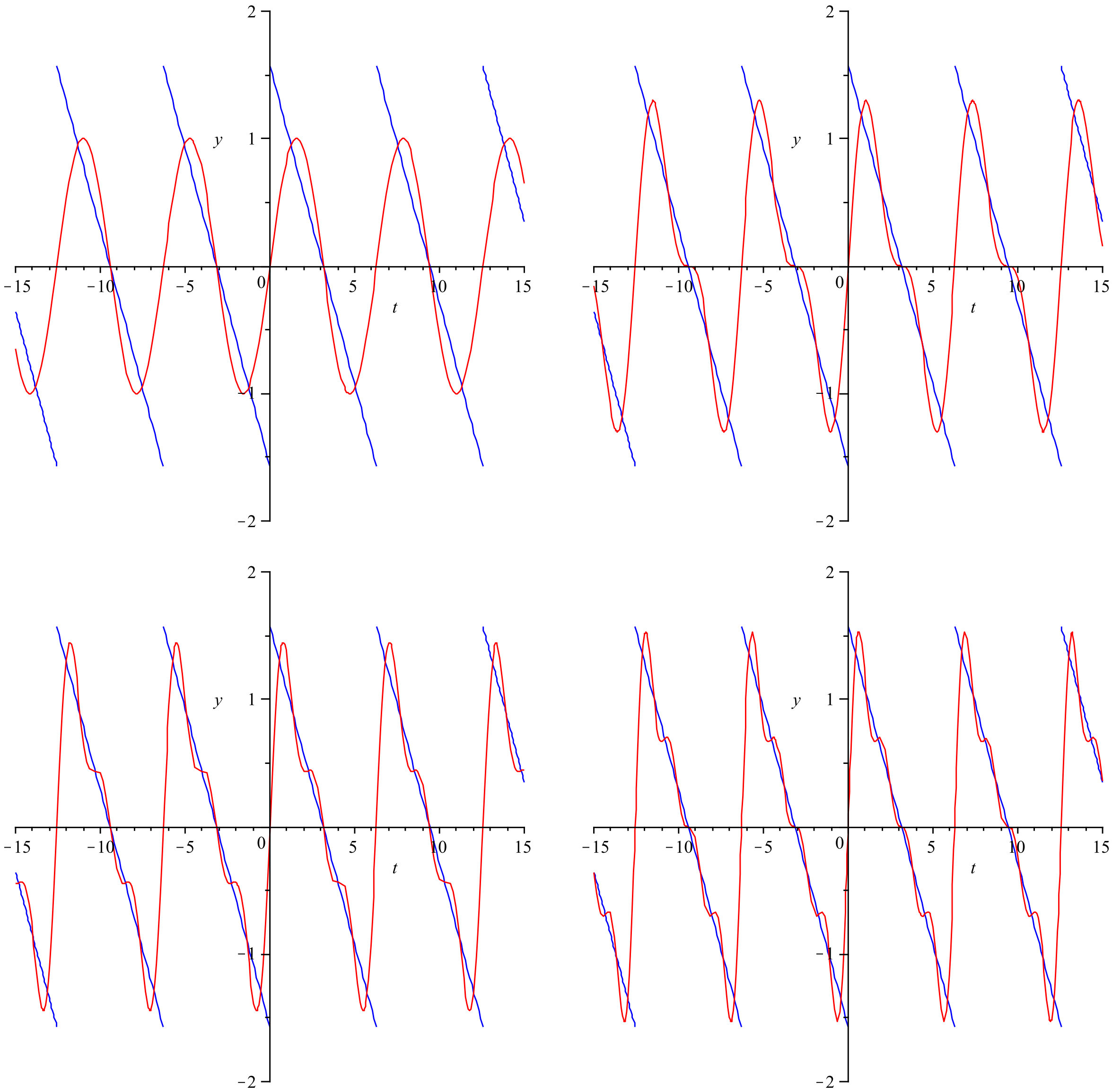
Déterminer la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$\text{pour tout } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\quad x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\cdot\cos(2\cdot n\cdot x)$$

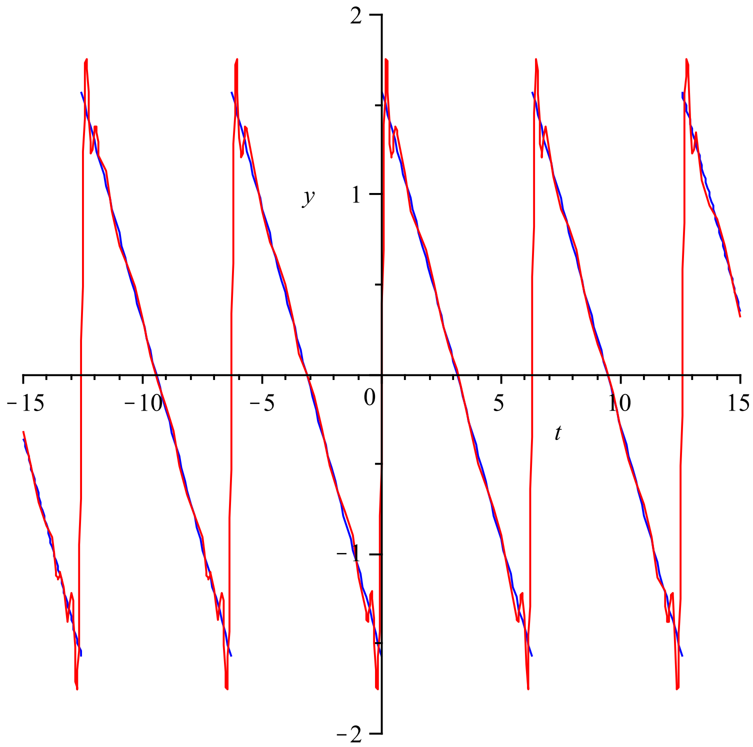
3. Synthèse du signal

Les coefficients de Fourier étant calculés, arrive le temps de la synthèse, i.e. la reconstruction du signal à partir de ses coefficients de Fourier : on a vu que la série de Fourier de la dent de scie converge simplement vers la dent de scie sur $\mathbb{R}$. Le programme suivant calcule les quinzes premières sommes partielles de cette série de Fourier et compare leurs courbes représentatives à celle du signal.

```
> synthese:=sum(b*sin(n*t),n=1..N):
  for k from 1 to 15
        do
           plot([signal,subs(N=k,synthese)],t=-15..15,
           y=-2..2,color=[blue, red])
        od
```



Nous n'avons affiché ici que les quatre premières sommes partielles de la série de Fourier de la dent de scie. Voici la quizième :



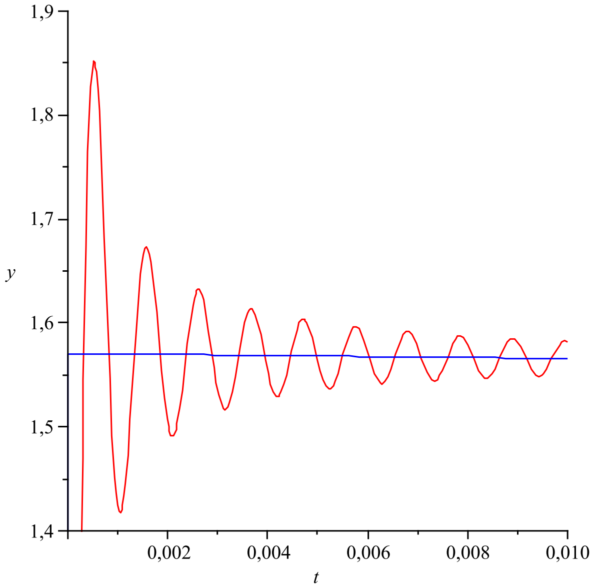
Afin de mieux appréhender l'aspect dynamique de la synthèse du signal originel, il est intéressant de programmer une animation...

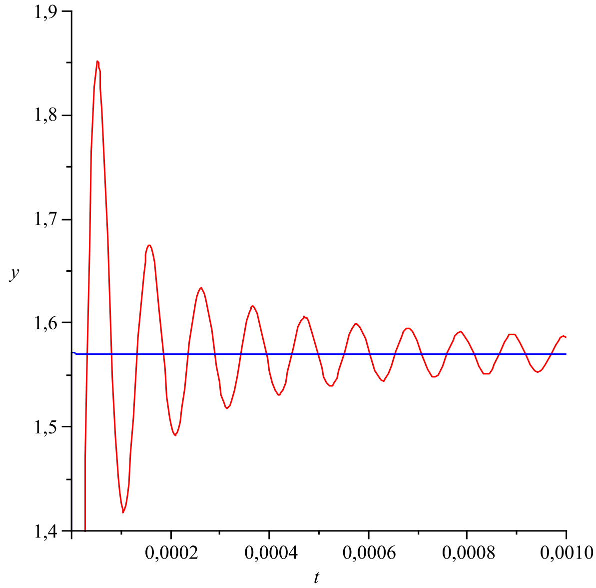
```
> with(plots):
  animate(plot,[[signal,synthese],t=-10..10,
  color=[blue,red]],N=1..60);
```

4. Le phénomène de Gibbs

On observe que la série de Fourier de la dent de scie converge « *plus difficilement* » aux points de discontinuité du signal.

```
> with(plots):
  plot([subs(N=6000,synthese),signal],t=0..0.01,
  y=1.4..1.9,color=[red,blue]);
  plot([subs(N=60000,synthese),signal],t=0..0.001,
  y=1.4..1.9,color=[red,blue]);
```





Après examen de plusieurs sommes partielles d'indice très grand (respectivement $n = 6000$ et $n = 60000$ pour les deux tracés ci-dessus), il semblerait qu'au voisinage d'une discontinuité du signal, ces dernières oscillent autour du signal avec une amplitude tendant vers une limite non nulle mais sur un intervalle de diamètre convergeant vers 0. C'est ce qu'on appelle le *phénomène de Gibbs*. Nous allons prouver ce résultat dans le cas du signal en dent de scie mais ce comportement est plus général.

Rappelons d'abord quelques résultats sur les séries de Fourier. La série de Fourier d'un signal périodique f de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux converge simplement vers le *signal normalisé* $\widetilde{f}$ défini par

$$\widetilde{f} : t \mapsto \frac{f(t-) + f(t+)}{2}$$

Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Dirichlet*. On peut même ajouter que cette convergence est uniforme si le signal est continu. Si le signal présente au moins un point de discontinuité, cette convergence ne peut être uniforme car les sommes partielles de Fourier sont continues. Si le signal f est discontinu au point 0, on peut établir l'existence d'un réel $\delta > 0$ et d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers 0 mais telle que

$$\left\| S_n(u_n) - f(u_n) \right\|_\infty \geqslant \delta$$

pour tout entier naturel n, où S_n désigne la n-ième somme partielle de Fourier de f. Ceci explique *le phénomène de Gibbs* : pour tout entier naturel n, la somme partielle d'ordre n « *s'écarte* » du signal avec une amplitude strictement supérieure à δ sur tout voisinage de 0.

Revenons à l'exemple de la scie. Dans ce cas, la suite $(\pi/2n)_{n\geqslant 1}$ convient.

```
> u:=Pi/(2*N): v:=subs(t=u,synthese): limit(v,N=infinity);
```

$$Si\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Le symbole Si désigne la fonction *sinus intégral* définie par

$$Si : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Ainsi, le logiciel nous répond que

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2\cdot N}\right)}{n} = Si\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t} dt > 0$$

Démontrons ce résultat. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel t, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\cdot t)}{k} &= \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{n} \cos(k\cdot t)\right) du = \int_0^t \cos\left(\frac{(n+1)\cdot u}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\cdot u}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du \\
&= 2\cdot \int_0^{t/2} \frac{\cos((n+1)\cdot u)\cdot \sin(n\cdot u)}{\sin(u)} du \\
&= 2\cdot \int_0^{t/2} \left(\frac{\sin(n\cdot u)\cdot\cos(n\cdot u)\cdot\cos(u)}{\sin(u)} - \sin^2(n\cdot u)\right) du \\
&= 2\cdot \int_0^{t/2} \left(\frac{\sin(2\cdot n\cdot u)\cdot\cos(u)}{2\cdot\sin(u)} - \sin^2(n\cdot u)\right) du
\end{aligned}$$

On a clairement

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/4n} \sin^2(n\cdot u) du = 0$$

On prouve sans peine que la fonction suivante

$$L : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \qquad t \longmapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$$

est prolongeable par continuité en 0 par $L(0) = 0$. On déduit alors du lemme de Riemann-Lebesgue que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/4n} \sin(2\cdot n\cdot u)\cdot\cos(u)\cdot L(u) du = 0$$

Comme

$$\int_0^{\pi/4n} \frac{\sin(2\cdot n\cdot u)\cdot\cos(u)}{u} du = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\cdot\cos\left(\frac{u}{2\cdot n}\right) du$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\cdot\sin\left(\frac{k\cdot\pi}{2\cdot n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\cdot\cos\left(\frac{u}{2\cdot n}\right) du = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(u)}{u} du$$

par le théorème de la convergence dominée.

Exercice 2. *Phénomène de Gibbs pour un signal en créneau*

On considère l'unique fonction 2π-périodique f telle que

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{pour } -\pi < t < 0 \\ 0 & \text{pour } t = 0, \pm\pi \\ 1 & \text{pour } 0 < t < \pi \end{cases}$$

1. Générer et représenter ce signal au moyen de Maple.

2. Calculer la série de Fourier de f. Etudier la convergence de cette série.

3. Visualiser la convergence des sommes partielles de Fourier vers f au moyen d'une animation.

5. Calculs de sommes

On rappelle l'égalité de Bessel-Parseval, valable pour toute fonction T-périodique f continue par morceaux :

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Ce résultat joint au théorème de Dirichlet permet un calcul élégant de quelques sommes classiques.

Exercice 3.

Calculs de sommes

1. Former le développement en série de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = |\sin(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Calculer les sommes des séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

Exercice 4.

Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et f la fonction 2π-périodique qui coïncide avec la fonction

$$x \longmapsto \cos(\alpha \cdot x)$$

sur $[-\pi, \pi]$.

1. Tracer la courbe représentative du signal f pour

$$\alpha \in \{0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0, 4, 0.45, 0.5\}$$

2. Quelle dire de la régularité du signal ?

3. Calculer les coefficients de fourier de f au moyen de Maple.

4. Justifier que

$$\frac{\pi\cdot\alpha}{\sin(\pi\cdot\alpha)} = 1 + 2\cdot\alpha^2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\alpha^2}$$

Exercice 5.

On considère le signal 2π-périodique pair s qui coïncide avec la fonction $t\mapsto 2\cdot\cosh(\alpha\cdot t)$ sur $[0,\pi]$ où $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

1. Explicitez les coefficients et la série de Fourier de s.

2. Représentez le signal s et quelques sommes partielles de la série de Fourier s.

3. Etudier le mode de convergence de cette série.

4. Qu'obtient-on en $t=\pi$ et en remplaçant $2\cdot\pi\cdot\alpha$ par x ?

5. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

6. Séries de Fourier et équations différentielles

On pourra rechercher des solutions particulières développables en série de Fourier à des EDL à coefficients constants et de second membre périodique.

Exercice 6.

Résoudre $y'' + y = s(t)$ où s est le signal 2π-périodique qui coïncide avec $t\mapsto\pi^2-t^2$ sur $[-\pi,\pi]$.