TP Maple 4 — Suites de Sturm. Localisation et séparation des racines.

Il existe de nombreuses méthodes de calcul approché des racines réelles d'un polynôme P à coefficients réels (dichotomie, méthode de la fausse position, méthode de Newton, etc). Dans tous les cas, il est indispensable de disposer d'un intervalle $[a, b[$ ne contenant qu'une seule racine de P. Les racines de P seront dites séparées si l'on dispose d'un tel intervalle pour chacune d'entre elles. Nous exposerons dans ce TP une méthode de séparation des racines d'un polynôme réel. Elle est fondée sur le **théorème de Sturm** *qui permet le décompte des racines d'un polynôme dans un intervalle $[a, b[$.*

1. Rappel : manipulation des polynômes sous Maple

Maple offre de nombreuses commandes permettant d'effectuer les opérations usuelles sur les polynômes. Là encore, l'approche pourra être aussi bien formelle que numérique.

Le logiciel admet un type *polynom* : toute expression construite à partir de sommes et de produits de termes de la forme x^n où x est une variable et n un entier naturel.

```
> p:=a*x^3*y+3*I*z: q:=x^n+2: type(p,polynom), type(q,polynom);
```

$$\text{true},\ \text{false}$$

Le logiciel dispose de nombreuses commandes de calcul algébrique sur des expressions de type *polynom*. En voici une petite illustration. Les commandes ainsi que leur syntaxe sont détaillées dans un tableau en fin de paragraphe.

```
> p:=x^3-2*x^2+3*x: q:=x^7-5*x:
```

$$x^{10}-5x^4-2x^9+10x^3+3x^8-15x^2$$

```
> degree(p), ldegree(p), coeff(p,x,2), lcoeff(q);
```

$$3,\ 1,\ -2,\ 1$$

```
> discrim(p,x);
```

$$-72$$

```
> a:=rem(q,p,x,'c');
```

$$a := 28x-10x^2$$

```
> c;
```

$$x^4+2x^3+x^2-4x-11$$

```
> expand(p*c+a);
```

$$x^7-5x$$

```
> f:=(2*x-y)*(x+y)*(x^2-x*y^2);
```

$$f := (2x-y)(x+y)(x^2-xy^2)$$

```
> expand(f);
```

$$2x^4-2x^3y^2+x^3y-x^2y^3-y^2x^2+y^4x$$

```
> collect(f,y);
```

$$y^4x-x^2y^3+(-2x^3-x^2)y^2+x^3y+2x^4$$

```
> degree(f), degree(f,y), degree(f,x);
```

$$5,\ 4,\ 4$$

Manipulation des polynômes

- **expand** : Développe un produit de polynômes.
- **coeff(p,x,n)** : coefficient de x^n dans p.
- **degree(p), degree(p,x)** : degré total de p, degré relatif à x.
- **ldegree(p), ldegree(p,x)** : valuation totale de p, valuation relative à x.
- **lcoeff(p,x)** : coefficient dominant de p en x.
- **collect(p,x)** : regroupe les termes de p selon les puissances de x.
- **rem(p,b,x)** : reste dans div. euclidienne de p par b.
- **rem(p,b,x,'q')** : idem, affecte en plus le quotient à la variable q.
- **quo(p,b,x)** : quotient dans la division euclidienne de p par b.
- **quo(p,b,x,'r')** : idem, affecte de plus le reste à la variable r.
- **discrim(p,x)** : discriminant de p vu comme polynôme de la variable x.

2. Le théorème de Sturm

La règle de Sturm repose sur un simple dénombrement de changement(s) de signe dans une suite de nombres réels.

Définition 1. **(Changements de signes d'une suite de nombres réels)**
Soient $n \geqslant 1$ et $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une suite finie de réels. On note $CS(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ le nombre de changement(s) de signe dans la suite obtenue à partir de $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ en supprimant les termes nuls. Par convention $CS(\varnothing) = 0$.

Par exemple, on a $CS(0, -9, 0, -8, 7, -9, 0) = 2$ et $CS(2, 0, 0, 7, -1, 0) = 1$.

Définition 2. **(Suite de Sturm d'un polynôme réel non constant)**
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. Soit $(P_1, \ldots, P_m)$ la suite finie de polynômes définie par l'algorithme d'Euclide signé :

$$\begin{cases} P_1 = P \\ P_2 = -P' \\ \text{Pour tout } k \geqslant 2,\ -P_{k+1} \text{ est le reste de la division de } P_{k-1} \text{ par } P_k \text{ si } P_k \neq 0 \end{cases}$$

On note m le plus petit entier naturel tel que $P_{m+1} = 0$. On appelle suite de Sturm de P la suite définie par :

$$S_1 = \frac{P_1}{P_m},\ S_2 = \frac{P_2}{P_m},\ \ldots,\ S_{m-1} = \frac{P_{m-1}}{P_m},\ S_m = \frac{P_m}{P_m} = 1$$

La terminologie « *algorithme d'Euclide signé* » fait référence à la présence des signes « − » dans la définition des restes successifs.

Exemple 3. Mise en œuvre de l'algorithme d'Euclide signé
Considérons le polynôme $P = X^2 + a \cdot X + b$ avec $\Delta = a^2 - 4 \cdot b \neq 0$. On obtient successivement :

$$P_1 = X^2 + a \cdot X + b, \quad P_2 = -2 \cdot X - a, \quad P_3 = -b + \frac{a^2}{4}$$

d'où la suite de Sturm suivante :

$$S_1 = \frac{X^2 + a \cdot X + b}{-b + \dfrac{a^2}{4}}, \quad S_2 = \frac{-2 \cdot X - a}{-b + \dfrac{a^2}{4}}, \quad S_3 = 1$$

Voici quelques points essentiels mais faciles à prouver :

- ▷ Pour tout $1 \leqslant k < m-1$, $P_k \wedge P_{k+1} = P_m = P \wedge P'$. On en déduit que $S_k \wedge S_{k+1} = 1$ pour tout $1 \leqslant k < m-1$.
- ▷ Le polynôme $S_1 = -\dfrac{P}{P \wedge P'}$ est à racines simples et a les mêmes racines que P.

Intéressons-nous à la fonction définie par

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto CS(S_1(x), S_2(x), \dots, S_m(x)) \end{aligned}$$

Notons $a_1 < \cdots < a_N$ les éléments de l'ensemble *fini*

$$\bigcup_{k=1}^{m-1} S_k^{-1}(\{0\})$$

On déduit du théorème des valeurs intermédiaires que ϕ est constante sur tout intervalle de la forme $]a_k, a_{k+1}[$ où $1 \leqslant k \leqslant N-1$: ϕ est donc une fonction en escalier sur $\mathbb{R}$.

Essayons de comprendre le comportement de $\phi(x)$ quand x est au voisinage de $\alpha \in \{a_1, \dots, a_N\}$.

► **Cas où α est racine du polynôme S_k où $2 \leqslant k \leqslant m-1$**
De l'égalité de division euclidienne

$$S_{k-1} = Q_k \cdot S_k - S_{k+1}$$

évaluée en α, on déduit que $S_{k-1}(\alpha) \cdot S_{k+1}(\alpha) \leqslant 0$. Mais puisque $S_k \wedge S_{k-1} = S_k \wedge S_{k+1} = 1$, α ne peut être une racine des polynômes S_{k-1} et S_{k-1}. Ainsi $S_{k-1}(\alpha) \cdot S_{k+1}(\alpha) < 0$. On déduit alors de la continuité de S_{k-1}, S_k et S_{k+1} en α le tableau de signe suivant :

		$S_{k-1}(x)$	$S_k(x)$	$S_{k+1}(x)$
Cas 1	signe en α^-	+	∗	−
	signe en α	+	0	−
	signe en α^+	+	□	−
Cas 2	signe en α^-	−	•	+
	signe en α	−	0	+
	signe en α^+	−	×	+

Quelles que soient les valeurs de $*, \square, \bullet$ et $\times$ dans $\{\pm\}$, le nombre de changement de signe dans $(S_{k-1}(x), S_k(x), S_{k+1}(x))$ ne varie pas lorsque x « *traverse* » la valeur α.

▶ **Cas où α est racine du polynôme S_1 (i.e. de $P_1 = P$)**

Si α est une racine de multiplicité ν de P, on a $P = (X-\alpha)^\nu \cdot Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$ et $P_m = (X-\alpha)^{\nu-1} \cdot T$ avec $T(\alpha) \neq 0$ d'où

$$P_2 = -P' = -(X-\alpha)^{\nu-1} \cdot \left(\nu \cdot Q + (X-\alpha) \cdot Q'\right) \quad \text{et} \quad S_2 = -\frac{P'}{P_m} = -\frac{\nu \cdot Q + (X-\alpha) \cdot Q'}{T(X)}$$

On en déduit que

$$S_1(x) \underset{\alpha}{\sim} \frac{Q(\alpha)}{T(\alpha)} \cdot (x-\alpha) \quad \text{et} \quad S_2(x) \underset{\alpha}{\sim} -\frac{\nu \cdot Q(\alpha)}{T(\alpha)}$$

D'où le tableau de signe suivant au voisinage de α :

		$S_1(x)$	$S_2(x)$
Cas 1	signe en α^-	$+$	$+$
	signe en α	0	$+$
	signe en α^+	$-$	$+$
Cas 2	signe en α^-	$-$	$-$
	signe en α	0	$-$
	signe en α^+	$+$	$-$

Le nombre de changement de signe dans $(S_1(x), S_2(x))$ varie donc d'une unité lorsque x « *traverse* » la valeur α.

▶ **Conclusion**

Notons $b_1 < b_2 < \cdots < b_r$ les racines réelles de P. On déduit de l'étude précédente que

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 \ \text{si } x < b_1 \\ k \ \text{si } b_k \leqslant x < b_{k+1} \text{ où } 1 \leqslant k \leqslant r-1 \\ r \ \text{si } x \geqslant b_r \end{cases}$$

D'où la formule suivante, pour tout couple de réels (a, b) tel que $a < b$:

$$\phi(b) - \phi(a) = \text{nombre de racines de } P \text{ dans l'intervalle } [a, b[$$

Nous venons d'établir le théorème de Sturm :

Théorème 4. (Sturm, 1829)
Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et $a < b$. En notant $(S_1, \ldots, S_m)$ la suite de Sturm de P et, pour tout réel x, $\phi(x) = CS(S_1(x), \ldots, S_m(x))$, on a

$$\phi(b) - \phi(a) = \text{nombre de racines de } P \text{ dans l'intervalle } [a, b[$$

Exercice 1. *La méthode de Sturm*

On se propose de programmer la méthode de Sturm sous Maple. Afin d'effectuer du calcul formel, on se contentera d'appliquer la méthode à des nombres a et b rationnels et des polynômes P de $\mathbb{Q}[X]$.

1. Ecrire une fonction `SuiteSturm(P)` prenant en argument un polynôme P et renvoyant sous forme d'une liste la suite de Sturm $S_1, \ldots, S_m$ associée à P. On supposera P non constant.

2. Ecrire une procédure `Signes(L)` prenant en argument une liste L de rationnels et renvoyant le nombre de changement de signe de L.

3. Ecrire une fonction `ChangementsDeSigne(P,a)` prenant en arguments un polynôme P et un nombre a et renvoyant le nombre de changements de signe dans la suite de Sturm du polynôme P que l'on supposera non constant.

4. Ecrire une fonction `NombreDeRacines(a,b)` prenant en argument un polynôme P et deux nombres $a < b$ et renvoyant le nombre de racines d'un polynôme P dans l'intervalle $[a, b[$.

5. Combien de racines le polynôme $16X^5 - 20X^3 + 5X$ admet-t-il dans l'intervalle $[0, 1]$?

On peut utiliser le théorème de Sturm pour calculer le nombre de racines réelles d'un polynôme P non constant. Il suffit pour cela de remarquer que la limite de $\phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$ existe et vaut le nombre de changement(s) de signe de la suite finie :

$$(\text{Coefficient dominant de } S_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$$

On adapte sans peine ce résultat au voisinage de $-\infty$.

Exemple 5. Retour à l'exemple 3
Reprenons l'exemple 3 : on a

$$\phi(+\infty) - \phi(-\infty) = \begin{cases} 1 - 1 = 0 & \text{si } \Delta < 0 \\ 2 - 0 = 2 & \text{si } \Delta > 0 \end{cases}$$

On retrouve que le trinôme $P = X^2 + a \cdot X + b$ avec $\Delta = a^2 - 4 \cdot b \neq 0$ admet deux racines réelles si $\Delta > 0$ et zéro sinon.

Exercice 2. *Variations sturmiennes*

Nombre de racines réelles d'un polynôme.

1. Ecrire une fonction `ChangementsDeSigneInfini(P,n)` d'arguments $P \in \mathbb{Q}[X]$ non constant et $n = \pm 1$ et renvoyant le nombre de *changements de signe au voisinage de* $+\infty$ *(si* $n = +1$*) ou* $-\infty$ *(si* $n = -1$*)* dans la suite de Sturm de P.

2. Ecrire une fonction `NombreDeRacinesReelles(P)` prenant en argument un polynôme P non constant et renvoyant le nombre de racines réelles de ce polynôme.

3. Combien de racines réelles le polynôme $X^7 - 2 \cdot X^6 - X^3 + 1$ admet-il ?

4. Combien d'entre-elles sont positives ?

3. Localisation des racines

Ce paragraphe avancera quelques éléments de réponse à la question suivante : peut-on trouver un disque fermé D (ou un autre compact) contenant toutes les racines réelles d'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ donné par ses coefficients ? Nous commencerons par le résultat fondamental suivant :

Théorème 6.
Si au moins un des a_i est non-nul, alors toutes les racines de

$$P = X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot X + a_0$$

sont majorées en module par l'unique racine strictement positive du polynôme

$$Q(x) = X^n - \sum_{i=0}^{n} |a_i| \cdot X^i$$

On déduit de ce résultat de nombreuses bornes pour la localisation des racines d'un polynôme réel.

Théorème 7. (Borne de Cauchy)
Toutes les racines du $P(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ sont contenues dans le disque centré à l'origine et de rayon $1 + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (|a_i|)$.

Le lecteur passionné par ce sujet pourra s'attaquer aux bornes de *Eneström et Kakeya* que l'on obtient également par le théorème 5.

Théorème 8. (Bornes d'Eneström et Kakeya)
Si tous les coefficients du polynôme $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ sont strictement positifs, alors les racines de P sont toutes contenues dans la couronne $\alpha \leqslant |z| \leqslant \beta$, où

$$\alpha = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| \frac{a_{k-1}}{a_k} \right| \quad \textit{et} \quad \beta = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| \frac{a_{k-1}}{a_k} \right|$$

Exercice 3. *Preuves*

Prouver les théorèmes 5 et 6.

4. Séparation des racines

Le théorème de Sturm permet la programmation d'une procédure de *séparation des racines* d'un polynôme P, i.e. une procédure renvoyant des intervalles deux à deux disjoints contenant toutes les racines réelles de P.

Exercice 4. *Localisation des racines par la méthode de Sturm*

Ecrire une procédure `LocalisationRacines(P)` prenant en argument un polynôme P et renvoyant sous la forme d'une liste de la forme $[r, [a_1, b_1[, [a_2, b_2[, \dots, [a_r, b_r[]$ le nombre r de racines réelles de P et des intervalles deux à deux disjoints contenant chacun une et une seule des racines réelles de P. On utilisera la borne de Cauchy.

5. La règle de Sturm sous Maple

Signalons que le logiciel connaît la règle Sturm de détermination du nombre de racines dans un intervalle donné.

```
> P:=2*X^3-7*X^2+3*X-2:
  sturm(sturmseq(P,X),X,-infinity,infinity);
```

$$1$$

```
> sturmseq(P,X);
```

$$\left[X^3 - \frac{7}{2}\cdot X^2 + \frac{3}{2}\cdot X - 1,\ X^2 + \frac{7}{3}\cdot X + \frac{1}{2},\ X + \frac{15}{62},\ -1\right]$$

Attention : il existe de nombreuses variantes concernant les suites de Sturm. Comme le lecteur l'aura reconnu, Maple n'utilise pas tout à fait la même convention que celle retenue dans ce cours...