TP Maple 10 | Exercices de révision

Avant d'aborder l'algèbre linéaire (calcul matriciel, etc.) et la suite de l'analyse réelle (à une ou plusieurs variables), nous ferons dans ce TP un bilan des séances précédentes.

Exercice 1.

Equations et séquences.

1. Résoudre l'équation $x^2 + 5x - 12 = 0$ et attribuer aux variables a_1 et b_1 les valeurs des racines.

2. Calculer $a_1^n + b_1^n$ pour $1 \leqslant n \leqslant 20$. Que constate-t-on ? Prouver ce résultat.

Exercice 2.

Pour I intervalle de $\mathbb{R}$ et f continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$(\mathbf{E_f}) \ : \ y' - y + f(x) = 0.$$

1. Désoudre $(\mathbf{E_f})$ au moyen de Maple dans le cas où $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = e^{-2x}\cos^3(x)$.

2. Dans cette question, $I = \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = \frac{1}{x}$.

2.a. Que donne Maple pour la résolution de cette équation ?

2.b. Représenter sur un même graphique les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y' - y + \frac{1}{x} = 0 \\ y(1) = \alpha \end{cases}, \qquad \alpha \in \{-15, -14, \ldots, 14, 15\}$$

2.c. Rechercher au moyen du logiciel les solutions de $(\mathbf{E_f})$ bornées au voisinage de $+\infty$.

2.d. Déterminer avec Maple un équivalent simple en $0+$ des solutions de $(\mathbf{E_f})$.

2.e. Déterminer sans le logiciel l'ensemble $\mathscr{H}$ des points (a, b) du demi-plan d'inéquation $x > 0$ par lesquels passe le graphe d'une solution $x \mapsto y(x)$ de $(\mathbf{E_f})$ telle que $y'(a) = 0$.

2.f. Déterminer sans le logiciel l'ensemble $\mathscr{L}$ des points (a, c) du demi-plan d'inéquation $x > 0$ par lesquels passe le graphe d'une solution $x \mapsto y(x)$ de $(\mathbf{E_f})$ telle que $y''(a) = 0$.

2.g. Représenter simultanément $\mathscr{H}, \mathscr{L}$, les solutions de $(\mathbf{E_f})$ trouvées à la question **2.b.** ainsi que l'unique solution de $(\mathbf{E_f})$ bornée au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On considère

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(n^7 - 3n^6\right)^{1/7} - P(n)^{1/3}$$

Déterminer P pour que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 le plus rapidement possible. Trouver alors un équivalent de u_n.

Exercice 4.

La suite bête

Dans le tableau suivant chaque ligne ne dépend que de la précédente :

1
11
21
1211
111221

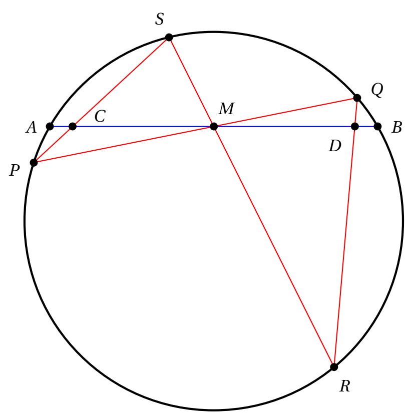
1. Quelle est la ligne suivante ? Démontrer que le nombre 4 n'apparaîtra jamais.

2. Ecrire une procédure `LaSuivante` qui à une ligne donnée associe la suivante.

3. Ecrire une procédure `SuiteBete` qui permettra de donner la n-ième ligne de la suite bête.

Exercice 5.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle, A, B deux points distincts sur $\mathscr{C}$ et M le milieu de la corde $[AB]$. Soient $[PQ]$ et $[SR]$ deux autres cordes passant par M. On note C (resp. D) le point d'intersection de $[AB]$ avec $[PS]$ (resp. $[RQ]$).



Démontrer que M est aussi le milieu de $[CD]$.
(Faites une preuve par un calcul analytique en coordonnées ; consacrez-vous à l'idée de la preuve et déléguez à Maple le travail calculatoire.)