TP Maple 12 | Polynômes et fractions rationnelles

Le logiciel nous permettra dans ce cadre d'alléger des calculs souvent ingrats (cf. les congruences), d'expérimenter afin de formuler des conjectures.

1. Polynômes

Maple offre de nombreuses commandes permettant d'effectuer les opérations usuelles sur les polynômes. Là encore, l'approche pourra être aussi bien formelle que numérique.

Maple admet un type *polynom* : toute expression construite à partir de sommes et de produits de termes de la forme x^n où x est une variable et n un entier naturel.

```
> p:=a*x^3*y+3*I*z: q:=x^n+2: type(p,polynom), type(q,polynom);
```

$$\text{true}, \ \text{false}$$

1.1. Manipulations élémentaires

Le logiciel dispose de nombreuses commandes de calcul algébrique sur des expressions de type *polynom*. En voici une petite illustration. Les commandes ainsi que leur syntaxe sont détaillées dans un tableau en fin de paragraphe.

```
> p:=x^3-2*x^2+3*x: q:=x^7-5*x:
```

$$x^{10}-5x^4-2x^9+10x^3+3x^8-15x^2$$

```
> degree(p), ldegree(p), coeff(p,x,2), lcoeff(q);
```

$$3,\ 1,\ -2,\ 1$$

```
> discrim(p,x);
```

$$-72$$

```
> a:=rem(q,p,x,'c');
```

$$a := 28x-10x^2$$

```
> c;
```

$$x^4+2x^3+x^2-4x-11$$

```
> expand(p*c+a);
```

$$x^7-5x$$

```
> f:=(2*x-y)*(x+y)*(x^2-x*y^2);
```

$$f := (2x-y)(x+y)(x^2-xy^2)$$

```
> expand(f);
```

$$2x^4-2x^3y^2+x^3y-x^2y^3-y^2x^2+y^4x$$

```
> collect(f,y);
```

$$y^4x-x^2y^3+(-2x^3-x^2)y^2+x^3y+2x^4$$

```
> degree(f), degree(f,y), degree(f,x);
```

$$5,\ 4,\ 4$$

Manipulation des polynômes

- **expand** : Développe un produit de polynômes.
- **coeff(p,x,n)** : coefficient de x^n dans p.
- **degree(p), degree(p,x)** : degré total de p, degré relatif à x.
- **ldegree(p), ldegree(p,x)** : valuation totale de p, valuation relative à x.
- **lcoeff(p,x)** : coefficient dominant de p en x.
- **collect(p,x)** : regroupe les termes de p selon les puissances de x.
- **rem(p,b,x)** : reste dans div. euclidienne de p par b.
- **rem(p,b,x,'q')** : idem, affecte en plus le quotient à la variable q.
- **quo(p,b,x)** : quotient dans la division euclidienne de p par b.
- **quo(p,b,x,'r')** : idem, affecte de plus le reste à la variable r.
- **discrim(p,x)** : discriminant de p vu comme polynôme de la variable x.

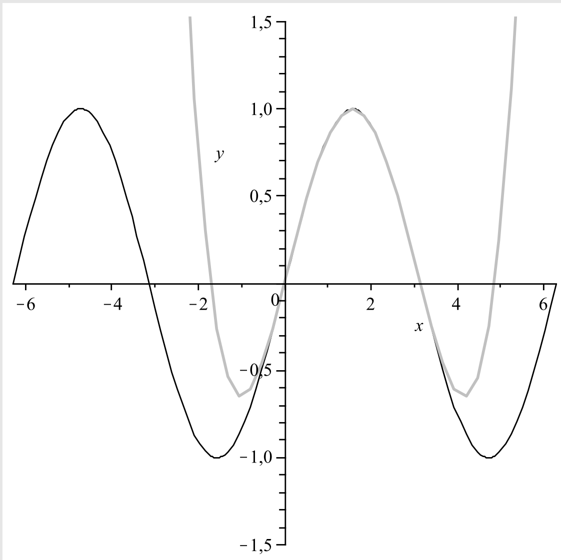
1.2. Familles de polynômes

Maple met à disposition de l'utilisateur les familles usuelles de polynômes : Bernoulli, Bernstein, les polynômes orthogonaux (Hermite, Legendre, Laguerre, Jacobi, Tchebychev, etc.). Notons l'existence de la bibliothèque **orthopoly** permettant la manipulation spécifique des polynômes orthogonaux. On pourra aussi calculer les polynômes d'interpolation de Lagrange (par exemple) en utilisant la commande **PolynomialInterpolation** de la bibliothèque **CurveFitting**. Effectuons, par exemple, l'interpolation de Lagrange de la fonction sinus en $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ et π :

```
> p:=PolynomialInterpolation([[0,0],[Pi/4,1/sqrt(2)],[Pi/2,1],
  [3*Pi/4,1/sqrt(2)],[Pi,0]],x,form=Lagrange);
```

$$p := -\frac{64}{3}\frac{\sqrt{2}x\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)(x-\pi)}{\pi^4}+64\frac{x\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)(x-)}{\pi^4}-\frac{64}{3}\sqrt{2}\frac{x\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)(x-\pi)}{\pi^4}$$

```
> plot([sin(x),p],x=-2*Pi..2*Pi,y=-5..5,color=[black,grey],
  thickness=[2,1]);
```



1.3. Factorisations

Le logiciel peut factoriser des polynômes au moyen de la commande **factor**.

```
> x^5+8*x^4-17*x^3-172*x^2-308*x-160
```

$$(x+2)^2(x-5)(x+1)(x+8)$$

Toutefois, cette factorisation ne peut être effectuée que sur le corps de base du polynôme (ie celui engendré par ses coefficients). On pourra alors spécifier au logiciel de travailler dans des extensions de ce corps [1] en indiquant en options des générateurs de cette extension.

1. Par définition, l'extension engendrée par $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ de $\mathbb{K}$ est l'ensemble des $P(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ pour P variant dans l'ensemble des polynômes à p indéterminées à coefficients dans $\mathbb{K}$. On la note $\mathbb{K}[\alpha_1,\ldots,\alpha_p]$.

Factorisation sur une extension

factor(p, [*générateurs de l'extension*])

```
> factor(x^2+1,I);
```

$$(x-I)(x+I)$$

```
> factor(x^2+x+1,[I,sqrt(3)]);
```

$$\frac{1}{4}(2x+1+I\sqrt{3})(2x+1-I\sqrt{3})$$

Il n'est pas toujours évident de trouver une extension du corps de base contenant les racines du polynôme. On pourra essayer d'avoir des informations dans ce sens en utilisant la commande **RootOf**.

```
> p:=x^3-2*x+1:allvalues(RootOf(p));
```

$$\frac{1}{2})\sqrt{5}-\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

```
> allvalues(RootOf(p));
```

$$(x-1)*(x^2+x-1),\ \frac{1}{4}(2x+1-\sqrt{5}))(2x+1+\sqrt{5})(x-1)$$

Signalons également l'existence de la commande **irreduc** qui permet de déterminer si un polynôme donné P est irréductible au non sur une extension donnée du corps de base de P. La syntaxe est la même que pour **factor**.

```
> irreduc(x^2+1),irreduc(x^2+1,I);
```

true, false

1.4. Racines : expressions exactes

Nous avons déjà étudié en détail la commande **solve**, utilisable dans un cadre dépassant de loin celui des équations algébriques. Il faut savoir que le logiciel est capable de calculer exactement les racines de tout polynôme de degré inférieur ou égal à quatre [2]. Les expressions des racines renvoyées par le lociel ne sont pourtant pas toujours simplifiées ! Il se peut qu'il affiche des solutions *a priori* complexes alors qu'elles sont toutes réelles !

```
> p:=x^3-4*x+1: rac:=solve(p=0,x):rac[1];
```

$$\frac{1}{6}(-108+12I\sqrt{687})^{1/3}+\frac{8}{(-108+12I\sqrt{687})^{(1/3)}}$$

```
> simplify(evalc(%));
```

$$\frac{4}{3}\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\sqrt{229}\right)+\frac{1}{6}\pi\right)$$

Résolution par la commande solve

solve (*polynôme p, inconnue de résolution*)

On forcera le logiciel à livrer une expression sous forme de radicaux en précisant **_EnvExplicit :=true** avant la commande **solve**.

Maple dispose d'une fonction **roots** capable de renvoyer, sous forme d'une liste, les racines d'un polynôme et leurs multiplicité sur une extension du corps de base précisée par l'utilisateur.

Racines dans une extension

roots(p, [*générateurs de l'extension*])

```
> roots(x^3-3*x+2);
```

$$[\,[1,2],\ [-2,1]\,]$$

```
> roots(x^3-1,{I,sqrt(3)});
```

$$\left[\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3},1\right],\ \left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I)\sqrt{3}\right],1],\ [1,1]\right]$$

Cette commande permet des calculs plus élégants qu'avec **solve** mais ne sera pas toujours aussi efficace.

Signalons que le logiciel connaît la règle Sturm de déterminantion du nombre de racines dans un intervalle donné.

2. Evariste Galois a prouvé au cours de sa courte existence qu'il n'existait aucune expression sous forme de radicaux permettant la résolution générale des équations algébriques de degré supérieur ou égal à cinq.

```
> sturm(sturmseq(p,x),x,-infinity,infinity);
```

$$3$$

1.5. Racines : valeurs approchées

La commande **fsolve** renvoie des valeurs approchées de toutes les racines réelles d'un polynôme donné.

Approximations des racines rélles d'un polynôme

fsolve(p=0,x)

```
> fsolve(p=0,x);
```

$$-2.114907541,\ 0.2541016884,\ 1.860805853$$

On peut rechercher de même des approximations des racines complexes d'un polynôme en spécifiant *complex* en option dans **fsolve**.

1.6. Exercices

Exercice 1.

On considère le polynôme réel suivant $P = X^4 + X^3 + aX^2 + \sqrt{2}X + b$.

1. Déterminer a et b pour que $(1+i)$ soit zéro de P ; calculer alors tous les zéros de P.

2. Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2.

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que $P(-1) = -18$ et dont les restes dans la division euclidienne par $X-1$, $X-2$ et $X-3$ sont égaux à 6.

Exercice 3.

Soit (**E**) l'équation $x^3 - 5x + 2 = 0$.

1. Résoudre exactement (**E**) au moyen de la commande **solve**.

2. Essayons à présent de *comprendre* comment Maple obtient ce résultat. Le logiciel applique la méthode de *Cardan*.

2.a. Soient deux réels u et v. Posons $x = u + v$. Prouver que *si*

$$u^3 + v^3 = -2 \text{ et } uv = \frac{5}{3}$$

alors x est solution de (**E**).

2.b. Résoudre l'équation

$$y^2 + 2y + \frac{125}{27} = 0.$$

2.c. En déduire les solutions de (**E**).

Exercice 4.

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$. On écrit $P = p_0 + p_1 X + \cdots + c_n X^n$. Pour calculer $P(a)$, évaluation de P en a, *Hörner* a proposé la méthode suivante :

$$P(a) = p_0 + a \cdot \Big(p_1 + a \cdot \Big(p_2 + a \cdot \Big(p_3 + a \cdot (\cdots)\Big)\Big)\Big)$$

Par exemple, pour calculer $P(2)$ lorsque $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on calcule successivement :

$$a,\ \ b+2a,\ \ c+2(b+2a) = c+2b+2^2a,\ \ d+2(c+2b+2^2a) = d+2c+2^2b+2^3a = P(2).$$

Ecrire une procédure **Horner(P,a)** d'arguments P (de type polynôme) et a (un nombre complexe) renvoyant la valeur $P(a)$ par la méthode d'Hörner.

Exercice 5.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et

$$\mathscr{H}_n = (1, X, X(X-1), \ldots, X(X-1)\cdots(X-n+1))$$

On prouve sans peine que la famille $\mathscr{H}_n$ est une base de E_n.

1. Ecrire une procédure **H(k)** prenant en argument un entier naturel k et renvoyant le polynôme

$$H_0 = 1,\ \ \forall k \geqslant 1,\ \ H_k = X(X-1)\cdots(X-k+1)$$

2. Ecrire une procédure **Changement(P)** prenant en argument un polynôme P de E_n et renvoyant son expression en fonction des vecteurs de la base $\mathscr{H}_n$.

Exercice 6.

On considère n réels deux à deux distincts $a_0, \dots, a_n$ et A le polynôme

$$A = \prod_{k=0}^{n} (X - a_k)$$

Soit B un polynôme réel. On considère l'application f qui à un polynôme P de $E = \mathbb{R}_n[X]$ associe le reste $R = f(P)$ de la division euclidienne de $B \cdot P$ par A.

1. Justifier qu'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Etude d'un exemple avec le logiciel de calcul formel : on demande de résoudre toutes les questions du **2.** avec le logiciel. On choisit $n = 2$, $A = (X-1)(X-2)(X-3)$ et $B = X^3$. Ainsi f est ici l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}_2[X]$ qui à $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de $X^3 \cdot P$ par le polynôme $(X-1)(X-2)(X-3)$.

2.a. Créer l'application f. On pourra utiliser la commande **rem** qui fournit le reste de la division euclidienne.

2.b. Expliciter alors l'image du polynôme $P = aX^2 + bX + c$.

2.c. Déterminer le noyau et l'image de f.

2.d. Créer la matrice de f dans la base canonique de E, et retrouver ainsi $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 7.

Equations de degré trois.

1. Soient $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer une *condition nécessaire et suffisante* pour que $X^3 + pX + q$ admette trois racines réelles distinctes.

2. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer une *condition nécessaire et suffisante* pour que $aX^3 + bX^2 + cX + d$ admette trois racines réelles distinctes.

2. Les fractions rationnelles

Les fractions rationnelles sont sous **MAPLE** considérées comme des expressions particulières : des quotients de polynômes à une ou plusieurs indéterminées ou toute expression équivalente. Leur type est *ratpoly*.

```
> F:=(x^3+2*x)/(x+2): type(F,ratpoly);

                                true
```

2.1. Manipulations élémentaires

Voici quelques commandes utiles pour les calculs portant sur les fractions rationnelles (voir la fin du paragraphe pour la list et le détail des commandes) :

```
> numer(F), denom(F);
```

$$x(x^2+2),\ \ x+2$$

```
> F+x: normal(%);
```

$$\frac{x(x^2+4x}{x+2}$$

```
> factor(F);
```

$$\frac{x(x^2+2)}{x+2}$$

```
> F:=(x^8+x^4)/(x^4+1): simplify(%), denom(%%);
```

$$x^4,\ \ x^4+1$$

Manipulation des fractions rationnelles

- **numer** : renvoie un numérateur d'une fraction rationnelle.
- **denom** : renvoie un dénominateur d'une fraction rationnelle.
- **normal** : met au même dénominateur.
- **factor** : factorise.
- **simplify** : effectue des simplifications.

2.2. Décomposition en éléments simples

C'est la commande **convert** utilisé avec l'option *parfrac* qui permet la décomposition en éléments simples. Atention , comme pour la factorisation des polynômes, le logiciel travaille dans le corps de base de la fraction rationnelle. On pourra préciser sur quelle extension du corps de base effectuer les calculs en option dans la commande **convert**.

Décomposition formelle en éléments simples sur une extension du corps de base

convert(F, parfrac, x, {*éléments engendrant l'extension*})

```
> F:=1/(x^3+1): convert(F,parfrac,x,sqrt(3));
```

$$\frac{1}{3}\frac{-x+2}{x^2-x+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}$$

```
> convert(F,parfrac,x,{sqrt(3),I});
```

$$-\frac{4I\sqrt{3}}{(2x-1+I\sqrt{3})(-9+3I\sqrt{3})}-\frac{4I\sqrt{3}}{(2x-1-I\sqrt{3})(9+3I\sqrt{3})}-\frac{4}{(-3+I\sqrt{3})(3+I\sqrt{3})(x+1)}$$

2.3. Exercices

Exercice 8.

Décomposer la fraction rationnelle $F=\dfrac{1}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.