Exercice 1.

Déterminer le comportement asymptotique de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Exercice 2.

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites de nombres réels telles qu'il existe deux entiers naturels impairs p et q vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n^p - v_n^q) = 0$$

Etablir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Exercice 3.

Soient $a > 0$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2} \end{cases}$$

On suppose que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

1. Que dire de a ?
2. Prouver la convergence de $(2^n \cdot u_n)_{n \geq 0}$ vers un réel ℓ strictement positif.
3. Trouver un développement asymptotique de u_n à deux termes.

Exercice 6.

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \exp\left(\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) - a \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ où $a \in \mathbb{R}$;

2. $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$;

3. $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n n^\alpha + n^{2\alpha}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$;

4. $u_n = \frac{1}{n^{\tan(\pi/4+1/n)}}$;

5. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\tan(\pi/4+1/n)}}$;

Exercice 4.

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée.

1. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge *si et seulement si* elle admet une unique valeur d'adhérence.

2. On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$ est un segment de $\mathbb{R}$.

3. Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(I, I)$, $u_0 \in I$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge *si et seulement si*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$$

Exercice 5.

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$

$$|u_{n+m} - u_n - u_m| \leq 1$$

Montrer que la suite de terme général u_n/n est convergente.

Exercice 7.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k}$$

1. Trouver un équivalent de b_n .
2. Montrer que $(b_n + b_{n+1})_{n \geq 1}$ converge vers une limite strictement négative.
3. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{b_n}$.

Exercice 8.

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$$

Exercice 9.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si 9 figure dans l'écriture décimale de } n \\ \frac{1}{n^\alpha} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Discuter la nature de la série $\sum u_n$.
2. Même question en remplaçant 9 par un autre chiffre.

Exercice 10.

Soit $a > 0$. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$.

Exercice 11.

Prouver la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$$

Exercice 12.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ell n(k)}{k}$$

1. Montrer l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$a_n = \frac{\ell n^2(n)}{2} + c + o(1)$$

2. En déduire la convergence et la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\ell n(n)}{n}$$

Exercice 13.

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Etablir la convergence et calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$$

Exercice 14.

Soit $x \in [-1, 1]$. Prouver l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(2\pi n! \alpha) = x$$

Exercice 15.

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = (u_1 \cdots u_n)^{1/n}$.

1. Etablir que, pour tout $n \geq 1$,

$$(n!)^{1/n} \geq \frac{e}{n+1}$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$w_n = \sum_{k=1}^n k u_k$$

Montrer la convergence de la série $\sum \frac{w_n}{n(n+1)}$.

3. Montrer la convergence de la série $\sum v_n$ et établir que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leq e \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

4. Cette inégalité est-elle optimale ?

Exercice 16.

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ et $k > 1$ tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

1. Etablir l'existence de $C > 0$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^\beta}$.
2. En déduire la nature de $\sum u_n$. Ce résultat est appelé *règle de Gauss*.
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $(z)_n = z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \cdots (z+n)$ avec la convention $(z)_0 = 1$ et on pose

$$u_n = \frac{(a)_n \cdot (b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{1}{n!} \quad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ appartiennent à } \mathbb{R}_+^*$$

La série $\sum u_n$ est appelée *série hypergéométrique de Gauss*. Etudier sa convergence.

Exercice 17.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{n}{n+2}$$

1. Que dire de $\sum u_n$?
2. Proposer une généralisation.

Exercice 18.

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels et convergente. Montrer que

$$\sum_{k=0}^n k u_k = o(n)$$

Exercice 19.

Soit $(a_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ une suite à termes positifs de limite nulle. On suppose que la suite définie par,

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = a_1 + \cdots + a_n - n a_n$$

est bornée. Etablir la convergence de la série $\sum a_n$.

Exercice 20.

Soit $(a_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum a_n^2$ soit convergente. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt{n}}$$

Etudier $(u_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 21.

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite positive décroissante qui tend vers 0, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^n k(u_k - u_{k+1})$$

1. Calculer T_n en fonction de S_n .
2. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature et que, si elles convergent, elles convergent vers la même somme.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Prouver la convergence et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}$$

Exercice 22.

Soient $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\sigma > 0$ tels que $\sum \frac{a_n}{n^\sigma}$ converge. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n^\sigma} = 0$$

Exercice 23.

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum x_n$ diverge. On note $(X_n)_{n \geq 0}$ la suite des sommes partielles de $\sum x_n$. Montrer que la série $\sum \frac{x_n}{X_n}$ diverge.

Exercice 24.

Soit $x \in]0, 1[$.

1. Montrer qu'il existe une et une seule suite croissante $(q_n)_{n \geq 1}$ d'entiers supérieurs ou égaux à deux telle que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n}$$

2. Montrer que x est irrationnel si et seulement si $(q_n)_{n \geq 1}$ est stationnaire.
3. Montrer que e est irrationnel.