Exercice 1.

On note E l'espace vectoriel réel des suites $(z_n)_{\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de limite nulle muni de la norme uniforme $\|z\|_\infty$. On pose, pour tout $z = (z_n)_{n\geqslant 0} \in E$

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_n}{2^n}$$

1. Prouver que ϕ est une forme linéaire continue et calculer sa norme subordonnée, notée $\|\phi\|$.

2. On note $H = \mathrm{Ker}(\phi)$ et on pose

$$z = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$$

Calculer $\phi(z)$ et $d(z, H)$.

Exercice 2.

On munit l'espace vectoriel réel E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de la norme un. Pour tout $f \in E$, on note $u(f)$ l'élément de E défini par,

$$x \in [0,1] \longmapsto u(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Prouver que u est une application linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 3.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et $f \in E^*$.

1. Montrer que f est continue *si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé.

2. On suppose $f \neq 0$ et f continue. Montrer que

$$\forall x \in E,\ \ d\left(x, \mathrm{Ker}(f)\right) = \frac{\left|f(x)\right|}{\|f\|}$$

Quelle formule généralise-t-on ainsi ?

Exercice 4.

Soit E l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum a_n$ soit absolument convergente. Pour tout a dans E, on note :

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

1. Etablir que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

2. On note

$$F = \left\{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1\right\}$$

Le sous-ensemble F est-il :

2.a. une partie convexe ?

2.b. ouvert dans $(E, \|\cdot\|)$?

2.c. fermé dans $(E, \|\cdot\|)$?

2.d. borné dans $(E, \|\cdot\|)$?

Exercice 5.

Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Omega_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{k}{n^2}\right\}$$

Trouver une CNS portant sur k pour que

$$\Omega = \bigcup_{n\geqslant 1} \Omega_n$$

soit un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6.

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \left\{f \in E \;\middle|\; f(0) = 0\right\}$.

1. Si N désigne une norme sur E, prouver que F est une partie fermée *ou* dense de (E, N).

2. Donner un exemple de norme sur E pour laquelle F est une partie fermée de (E, N), puis un exemple de norme sur E pour laquelle F est une partie dense de (E, N).

Exercice 7.

Etudier la convergence de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = a^{1/n} - \dfrac{b^{1/n}+c^{1/n}}{2}$ où $a>0, b>0$ et $c>0$;
2. $u_n = \dfrac{\ell n(1+a^n n^\alpha)}{n^\beta}$ où $a>0$, $\alpha>0$ et $\beta \in \mathbb{R}$;
3. $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$;
4. $u_n = \left(\dfrac{\ell n(n+1)}{\ell n(n)} - 1\right)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$;
5. $u_n = (\ell n(n))^{-\ell n(n)}$;
6. $u_n = \dfrac{1}{(-1)^n\sqrt{n}+\ell n(n)}$;
7. $u_n = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$;
8. $u_n = \tan\left(\pi\left(7+4\sqrt{3}\right)^n\right)$;
9. $u_n = (1-\tanh(n))^{\tanh(\frac{1}{n})}$;
10. $u_n = \cos\left(n^2\pi\,\ell n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 8.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k\sqrt{k}$$

1. Trouver un équivalent de b_n.
2. Montrer que $(b_n+b_{n+1})_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite strictement négative.
3. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{b_n}$.

Exercice 9.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si 9 figure dans l'écriture décimale de } n \\ \dfrac{1}{n^\alpha} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Discuter la nature de la série $\sum u_n$.
2. Même question en remplaçant 9 par un autre chiffre.

Exercice 10.

Déterminer, en fonction de $\alpha>0$, la nature de la série de terme général $u_n = \cos^n(1/n^\alpha)$.

Exercice 11.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ell n(k)}{k}$$

1. Montrer l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$a_n = \frac{\ell n^2(n)}{2} + c + o(1)$$

2. En déduire la convergence et la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\ell n(n)}{n}$$

Exercice 12.

Soit $x \in [-1,1]$. Prouver l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(2\pi n!\alpha) = x$$

Exercice 13.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{n}{n+2}$$

1. Que dire de $\sum u_n$?
2. Proposer une généralisation.

Exercice 14.

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = (u_1 \cdots u_n)^{1/n}$.

1. Etablir que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$(n!)^{1/n} \geqslant \frac{e}{n+1}$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} k u_k$$

Montrer la convergence de la série $\sum \frac{w_n}{n(n+1)}$.

3. Montrer la convergence de la série $\sum v_n$ et établir que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leqslant e \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

4. Cette inégalité est-elle optimale ?

Exercice 15.

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum a_n^2$ soit convergente. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt{n}}$$

Etudier $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 16.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite positive décroissante qui tend vers 0, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1})$$

1. Calculer T_n en fonction de S_n.

2. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature et que, si elles convergent, elles convergent vers la même somme.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Prouver la convergence et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}$$