Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $|f'(0)| < 1$. Montrer que

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f^n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \right\}$$

est un ouvert.

Remarque – *f^n désigne ici les puissances pour la loi de composition des fonctions.*

Exercice 2.

Soient E une evn et F un sev strict de E.

1. On suppose F de dimension finie. Montrer qu'il existe $x \in E$ de norme 1 à distance 1 de F.

2. On suppose F fermé. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Montrer qu'il existe $x \in E$ de norme 1 à distance supérieure ou égale à $1-\varepsilon$ de F.

Exercice 3.

Soit $(b_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$. On suppose que $b_{n+1} \sim b_n$. Montrer que l'ensemble

$$E = \left\{ \frac{b_m}{b_n} \;\middle|\; (n,m) \in \mathbb{N}^2 \right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4.

Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ suivant

$$A = \left\{ x \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (s,r) \in \mathbb{Z}^2,\ r \geqslant 2 \text{ et } \left| x - \frac{s}{r} \right| \leqslant \frac{1}{r^n} \right\}$$

1. Montrer que A est de *mesure nulle* i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, A est inclus dans une réunion dénombrable d'intervalles $\big([a_p, b_p]\big)_{p\geqslant 0}$ telle que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left(b_p - a_p\right) \leqslant \varepsilon$$

2. Montrer que A est dense et non dénombrable.

Exercice 5.

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ continue telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \exp\big(f(z)\big) = z\ ?$$

Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et injective. Prouver que f est strictement monotone. On pourra considérer

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y)^2 & \longmapsto & f(x) - f(y) \end{array}$$

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f n'est pas injective.

Exercice 8.

Soient E et F deux espaces de Banach.

1. Soit $T : E \to F$ une application linéaire continue et « *presque surjective* », i.e. telle qu'il existe $C > 0$ et $0 < \alpha < 1$ tels que

$$\forall y \in F \text{ tel que } \|y\| \leqslant 1,\ \exists x \in E,\ \begin{cases} \|x\| \leqslant C \\ \|y - T(x)\| \leqslant \alpha \end{cases}$$

Montrer que T est surjective et plus précisément que

$$\forall y \in F \text{ tel que } \|y\| \leqslant 1,\ \exists x \in E,\ \begin{cases} \|x\| \leqslant \dfrac{C}{1-\alpha} \\ y = T(x) \end{cases}$$

2. Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}(E,F)$ des surjections linéaires et continues de E sur F est un ouvert de $\mathscr{L}(E,F)$.

Exercice 9.

Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et

$$N : P \in E \longmapsto N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|P^{(k)}(0)\right|}{k!}$$

1. Montrer que N est une norme sur E.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k^2}}{k^2}$$

2.a. La suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle de Cauchy dans (E, N) ?

2.b. En déduire que (E, N) n'est pas complet.

Exercice 10.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n la boule fermée de centre a_n et de rayon r_n. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ B_{n+1} \subset B_n$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \|a_{n+1} - a_n\| \leqslant r_n - r_{n+1}$$

2. Si E est un espace de Banach, montrer que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

est une boule fermée.

Exercice 11.

Soient E un evn, V et W deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On suppose V de dimension finie. Montrer que l'application suivante

$$N : x \longmapsto \inf\{\|x + v\| \ \mid\ v \in V\}$$

définit une norme sur W.

Exercice 12.

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \left\{f \in E \;\middle|\; f(0) = 0\right\}$.

1. Si N désigne une norme sur E, prouver que F est une partie fermée *ou* dense de (E, N).

2. Donner un exemple de norme sur E pour laquelle F est une partie fermée de (E, N), puis un exemple de norme sur E pour laquelle F est une partie dense de (E, N).

Exercice 13.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E et

$$d_A : x \in E \longmapsto \inf_{a\in A} \|x - a\|$$

1. Montrer que d_A est 1-lipschitzienne.

2. Montrer que si A est convexe alors d_A est convexe.

3. On suppose ici A fermée et E de dimension finie.

3.a. Etablir que

$$\forall x \in E,\ \ \exists a \in A,\ \ d_A(x) = \|x - a\|$$

3.b. On suppose que $x \notin A$. Montrer que a appartient à la *frontière* de A définie par :

$$\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

4. Pour tout $x \in E$, on note

$$P(x) = \left\{a \in A \;\middle|\; d_A(x) = \|x - a\|\right\}$$

Montrer que si A est convexe alors $P(x)$ est convexe.

5. Soient U un ouvert de E et K un compact non vide de E inclus dans U. Montrer l'existence de $\rho > 0$ tel que

$$\forall x \in K,\ \ \forall a \in E \setminus U,\ \ \|x - a\| \geqslant \rho$$