Exercice 1.

Morphismes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$

1. Soient $j : G \mapsto H$ un morphisme entre deux groupes abéliens et g un élément de G d'ordre fini n. Etablir que $j(g)$ est d'ordre fini et que son ordre divise n.

2. Déterminer les morphismes de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

3. Trouver une *condition nécessaire et suffisante* pour qu'il existe un morphisme *non constant* de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

4. Déterminer alors le cardinal de l'ensemble de ces morphismes.

Exercice 2.

Caractériser les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.

Exercice 3.

Montrer que

$$G = \left\{x + y\sqrt{3} \mid x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{Z},\ x^2 - 3y^2 = 1\right\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Exercice 4.

Déterminer, à isomorphisme près, les groupes commutatifs de cardinal 6.

Exercice 5.

Caractériser les parties A non vides de $\mathbb{C}^*$ stables par le produit et finies.

Exercice 6.

Soit p un nombre premier. On note

$$Z_p = \{a/b \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \text{ et } p \nmid b\}$$

et

$$J_p = \{a/b \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ p \mid a \text{ et } p \nmid b\}.$$

1. Montrer que Z_p est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

2. Montrer que J_p est un idéal de Z_p.

3. Etablir que tout idéal de Z_p autre que Z_p est inclus dans J_p.

4. Déterminer les idéaux de Z_p.

Exercice 7.

Soit A un anneau commutatif tel que, pour tout idéal I de A et pour tout $(x,y) \in A^2$, on ait

$$xy \in I \Longrightarrow x \in I \text{ ou } y \in I.$$

Montrer que A est un corps.

Exercice 8.

Soit D l'anneau des nombres décimaux

$$D = \{x \in \mathbb{Q}\,;\ \exists n \in \mathbb{Z}\ /\ 10^n x \in \mathbb{Z}\}.$$

Montrer que tous les idéaux de D sont principaux.

Exercice 9.

Soit A un anneau commutatif, on appelle *radical* d'un idéal I de A l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{x \in A\,;\ \exists n \in \mathbb{N}\ /\ x^n \in I\}.$$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.

2. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

3. Montrer que si I et J sont deux idéaux alors on a

$$\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J} \quad \text{et} \quad \sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}.$$

Exercice 10.

Soit A un anneau commutatif, on dit que $a \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$.

1. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal.

2. Déterminer l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $n \geqslant 2$.

3. Donner un exemple d'anneau non commutatif dans lequel l'ensemble des éléments nilpotents n'est pas un idéal.

Exercice 11.

Soit A un anneau tel que

$$\forall x \in A, \quad x^3 = x.$$

1. Montrer que $\forall x \in A, \ 6x = 0$.

2. Soient

$$A_2 = \{x \in A \mid 2x = 0\} \ \text{ et } \ A_3 = \{x \in A \mid 3x = 0\}.$$

Etablir que $A = A_2 + A_3$.

3. On souhaite établir que A est commutatif.

3.a. En déduire que $\forall x \in A_2, \ x^2 = x$.

3.b. Montrer que les éléments de A_2 commutent.

3.c. Etablir que les éléments de A_3 commutent.

3.d. Conclure.

Exercice 12.

Soient K un corps et $A = K \times K$.

1. Rappeler la structure canonique d'anneau de A.

2. L'anneau A est-il un corps ?

3. Déterminer les idéaux de A.