TP Maple 2 | Polynômes. Séparation des racines.

Après quelques rappels sur le type « polynom » de Maple, nous aborderons la théorie de Sturm dans l'objectif de réaliser la séparation des racines d'un polynôme réel P donné.

1. Les polynômes sous Maple

Maple offre de nombreuses commandes permettant d'effectuer les opérations usuelles sur les polynômes. Là encore, l'approche pourra être aussi bien formelle que numérique.

Maple admet un type *polynom* : toute expression construite à partir de sommes et de produits de termes de la forme x^n où x est une variable et n un entier naturel.

```
> p:=a*x^3*y+3*I*z: q:=x^n+2: type(p,polynom), type(q,polynom);
```

$$\text{true},\ \text{false}$$

1.1. Manipulations élémentaires

Le logiciel dispose de nombreuses commandes de calcul algébrique sur des expressions de type *polynom*. En voici une petite illustration. Les commandes ainsi que leur syntaxe sont détaillées dans un tableau en fin de paragraphe.

```
> p:=x^3-2*x^2+3*x: q:=x^7-5*x:
```

$$x^{10}-5x^4-2x^9+10x^3+3x^8-15x^2$$

```
> degree(p), ldegree(p), coeff(p,x,2), lcoeff(q);
```

$$3,\ 1,\ -2,\ 1$$

```
> discrim(p,x);
```

$$-72$$

```
> a:=rem(q,p,x,'c');
```

$$a := 28x-10x^2$$

```
> c;
```

$$x^4+2x^3+x^2-4x-11$$

```
> expand(p*c+a);
```

$$x^7-5x$$

```
> f:=(2*x-y)*(x+y)*(x^2-x*y^2);
```

$$f := (2x-y)(x+y)(x^2-xy^2)$$

```
> expand(f);
```

$$2x^4-2x^3y^2+x^3y-x^2y^3-y^2x^2+y^4x$$

```
> collect(f,y);
```

$$y^4 x - x^2 y^3 + (-2x^3 - x^2) y^2 + x^3 y + 2x^4$$

```
> degree(f), degree(f,y), degree(f,x);
```

$$5,\ 4,\ 4$$

Manipulation des polynômes

- **expand** : Développe un produit de polynômes.
- **coeff(p,x,n)** : coefficient de x^n dans p.
- **degree(p), degree(p,x)** : degré total de p, degré relatif à x.
- **ldegree(p), ldegree(p,x)** : valuation totale de p, valuation relative à x.
- **lcoeff(p,x)** : coefficient dominant de p en x.
- **collect(p,x)** : regroupe les termes de p selon les puissances de x.
- **rem(p,b,x)** : reste dans div. euclidienne de p par b.
- **rem(p,b,x,'q')** : idem, affecte en plus le quotient à la variable q.
- **quo(p,b,x)** : quotient dans la division euclidienne de p par b.
- **quo(p,b,x,'r')** : idem, affecte de plus le reste à la variable r.
- **discrim(p,x)** : discriminant de p vu comme polynôme de la variable x.

Exercice 1. *Le critère de Routh*

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est *stable* si toutes ses racines complexes ont une partie réelle strictement négative. Dans cet exercice, on considère un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ unitaire.

1. Montrer que si A est stable alors tous ses coefficients sont strictement positifs.

2. Un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$ dont tous les coefficients sont strictement positifs est-il nécessairement stable ?

3. On décompose A sur $\mathbb{C}$: $A = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$ et on pose

$$B = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(X - \lambda_i - \lambda_j\right)$$

Montrer que A est stable *si et seulement si* tous les coefficients de A et de B sont strictement positifs.

4. On considère ici $A = X^3 + a \cdot X^2 + b \cdot X + c$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que A soit stable. On utilisera Maple pour les calculs intermédiaires.

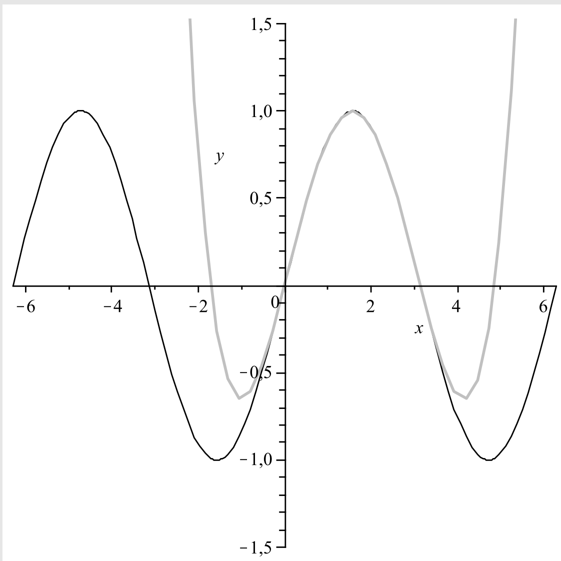
1.2. Familles de polynômes

Maple met à disposition de l'utilisateur les familles usuelles de polynômes : Bernoulli, Bernstein, les polynômes orthogonaux (Hermite, Legendre, Laguerre, Jacobi, Tchebychev, etc.). Notons l'existence de la bibliothèque **orthopoly** permettant la manipulation spécifique des polynômes orthogonaux. On pourra aussi calculer les polynômes d'interpolation de Lagrange (par exemple) en utilisant la commande **PolynomialInterpolation** de la bibliothèque **CurveFitting**. Effectuons, par exemple, l'interpolation de Lagrange de la fonction sinus en $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ et π :

```
> p:=PolynomialInterpolation([[0,0],[Pi/4,1/sqrt(2)],[Pi/2,1],
  [3*Pi/4,1/sqrt(2)],[Pi,0]],x,form=Lagrange);
```

$$p := -\frac{64}{3}\frac{\sqrt{2}x\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)(x-\pi)}{\pi^4} + 64\frac{x\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)(x-)}{\pi^4} - \frac{64}{3}\sqrt{2}\frac{x\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)(x-\pi)}{\pi^4}$$

```
> plot([sin(x),p],x=-2*Pi..2*Pi,y=-5..5,color=[black,grey],
  thickness=[2,1]);
```



1.3. Factorisations

Le logiciel peut factoriser des polynômes au moyen de la commande **factor**.

```
> x^5+8*x^4-17*x^3-172*x^2-308*x-160
```

$$(x+2)^2(x-5)(x+1)(x+8)$$

Toutefois, cette factorisation ne peut être effectuée que sur le corps de base du polynôme (ie celui engendré par ses coefficients). On pourra alors spécifier au logiciel de travailler dans des extensions de ce corps[1] en indiquant en options des générateurs de cette extension.

Factorisation sur une extension

factor(p, [*générateurs de l'extension*])

```
> factor(x^2+1,I);
```

$$(x-I)(x+I)$$

```
> factor(x^2+x+1,[I,sqrt(3)]);
```

$$\frac{1}{4}(2x+1+I\sqrt{3})(2x+1-I\sqrt{3})$$

Il n'est pas toujours évident de trouver une extension du corps de base contenant les racines du polynôme. On pourra essayer d'avoir des informations dans ce sens en utilisant la commande **RootOf**.

```
> p:=x^3-2*x+1:allvalues(RootOf(p));
```

$$\frac{1}{2})\sqrt{5}-\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

```
> allvalues(RootOf(p));
```

$$(x-1)*(x^2+x-1),\ \frac{1}{4}(2x+1-\sqrt{5}))(2x+1+\sqrt{5})(x-1)$$

Signalons également l'existence de la commande **irreduc** qui permet de déterminer si un polynôme donné P est irréductible au non sur une extension donnée du corps de base de P. La syntaxe est la même que pour **factor**.

1. Par définition, l'extension engendrée par $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ de $\mathbb{K}$ est l'ensemble des $P(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$ pour P variant dans l'ensemble des polynômes à p indéterminées à coefficients dans $\mathbb{K}$. On la note $\mathbb{K}[\alpha_1,\dots,\alpha_p]$.

```
> irreduc(x^2+1),irreduc(x^2+1,I);
```

$$\text{true}, \ \text{false}$$

1.4. Racines : expressions exactes

Nous avons déjà étudié en détail la commande **solve**, utilisable dans un cadre dépassant de loin celui des équations algébriques. Il faut savoir que le logiciel est capable de calculer exactement les racines de tout polynôme de degré inférieur ou égal à quatre [2]. Les expressions des racines renvoyées par le lociel ne sont pourtant pas toujours simplifiées ! Il se peut qu'il affiche des solutions *a priori* complexes alors qu'elles sont toutes réelles !

```
> p:=x^3-4*x+1: rac:=solve(p=0,x):rac[1];
```

$$\frac{1}{6}(-108+12I\sqrt{687})^{1/3}+\frac{8}{(-108+12I\sqrt{687})^{(}1/3)}$$

```
> simplify(evalc(%));
```

$$\frac{4}{3}\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}\sqrt{229}\right)+\frac{1}{6}\pi\right)$$

Résolution par la commande **solve**

solve (*polynôme p, inconnue de résolution*)

On forcera le logiciel à livrer une expression sous forme de radicaux en précisant **_EnvExplicit :=true** avant la commande **solve**.

Maple dispose d'une fonction **roots** capable de renvoyer, sous forme d'une liste, les racines d'un polynôme et leurs multiplicité sur une extension du corps de base précisée par l'utilisateur.

Racines dans une extension

roots(p, [*générateurs de l'extension*])

2. Evariste Galois a prouvé au cours de sa courte existence qu'il n'existait aucune expression sous forme de radicaux permettant la résolution générale des équations algébriques de degré supérieur ou égal à cinq.

```
> roots(x^3-3*x+2);
```

$$[[1,2],\ [-2,1]]$$

```
> roots(x^3-1,{I,sqrt(3)});
```

$$\left[\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3},1\right],\ \left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I)\sqrt{3}\right],1],\ [1,1]\right]$$

Cette commande permet des calculs plus élégants qu'avec **solve** mais ne sera pas toujours aussi efficace.

1.5. Racines : valeurs approchées

La commande **fsolve** renvoie des valeurs approchées de toutes les racines réelles d'un polynôme donné.

Approximations des racines rélles d'un polynôme

fsolve(p=0,x)

```
> fsolve(p=0,x);
```

$$-2.114907541,\ 0.2541016884,\ 1.860805853$$

On peut rechercher de même des approximations des racines complexes d'un polynôme en spécifiant *complex* en option dans **fsolve**.

2. Les fractions rationnelles

Les fractions rationnelles sont sous **MAPLE** considérées comme des expressions particulières : des quotients de polynômes à une ou plusieurs indéterminées ou toute expression équivalente. Leur type est *ratpoly*.

```
> F:=(x^3+2*x)/(x+2): type(F,ratpoly);
```

true

2.1. Manipulations élémentaires

Voici quelques commandes utiles pour les calculs portant sur les fractions rationnelles (voir la fin du paragraphe pour la list et le détail des commandes) :

```
> numer(F), denom(F);
```

$$x(x^2+2),\ \ x+2$$

```
> F+x: normal(%);
```

$$\frac{x(x^2+4x}{x+2}$$

```
> factor(F);
```

$$\frac{x(x^2+2)}{x+2}$$

```
> F:=(x^8+x^4)/(x^4+1): simplify(%), denom(%%);
```

$$x^4,\ \ x^4+1$$

Manipulation des fractions rationnelles

- **numer** : renvoie un numérateur d'une fraction rationnelle.
- **denom** : renvoie un dénominateur d'une fraction rationnelle.
- **normal** : met au même dénominateur.
- **factor** : factorise.
- **simplify** : effectue des simplifications.

2.2. Décomposition en éléments simples

C'est la commande **convert** utilisé avec l'option *parfrac* qui permet la décomposition en éléments simples. Atention , comme pour la factorisation des polynômes, le logiciel travaille dans le corps de base de la fraction rationnelle. On pourra préciser sur quelle extension du corps de base effectuer les calculs en option dans la commande **convert**.

Décomposition formelle en éléments simples sur une extension du corps de base

convert(F, parfrac, x, {*éléments engendrant l'extension*})

```
> F:=1/(x^3+1): convert(F,parfrac,x,sqrt(3));
```

$$\frac{1}{3}\frac{-x+2}{x^2-x+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}$$

```
> convert(F,parfrac,x,{sqrt(3),I});
```

$$-\frac{4I\sqrt{3}}{(2x-1+I\sqrt{3})(-9+3I\sqrt{3})}-\frac{4I\sqrt{3}}{(2x-1-I\sqrt{3})(9+3I\sqrt{3})}-\frac{4}{(-3+I\sqrt{3})(3+I\sqrt{3})(x+1)}$$

3. Séparation des racines d'un polynôme

Il existe de nombreuses méthodes de calcul approché des racines réelles d'un polynôme P à coefficients réels (dichotomie, méthode de la fausse position, méthode de Newton, etc). Dans tous les cas, il est indispensable de disposer d'un intervalle $[a,b]$ ne contenant qu'une seule racine de P. Les racines de P seront dites *séparées* si l'on dispose d'un tel intervalle pour chacune d'entre elles. Nous exposerons dans ce paragraphe une méthode de séparation des racines d'un polynôme réel. Elle est fondée sur le **théorème de Sturm** qui permet le décompte des racines de P dans un intervalle $[a,b[$.

3.1. Le théorème de Sturm

La règle de Sturm repose sur un simple dénombrement de changement(s) de signe dans une suite de nombres réels.

Définition 1. **(Changements de signes d'une suite de nombres réels)**

Soient $n\geqslant 1$ et $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ une suite finie de réels. On note $CS(u_1,u_2,\dots,u_n)$ le nombre de changement(s) de signe dans la suite obtenue à partir de $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ en supprimant les termes nuls. Par convention $CS(\varnothing)=0$.

Par exemple, on a $CS(0,-9,0,-8,7,-9,0)=2$ et $CS(2,0,0,7,-1,0)=1$.

Définition 2. **(Suite de Sturm d'un polynôme réel non constant)**

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ non constant. Soit $(P_1,\dots,P_m)$ la suite finie de polynômes définie par l'algorithme d'Euclide signé :

$$\begin{cases} P_1=P \\ P_2=-P' \\ \textit{Pour tout } k\geqslant 2,\ -P_{k+1} \textit{ est le reste de la division de } P_{k-1} \textit{ par } P_k \textit{ si } P_k\neq 0 \end{cases}$$

On note m le plus petit entier naturel tel que $P_{m+1}=0$. On appelle suite de Sturm de P la suite définie par :

$$S_1=\frac{P_1}{P_m},\quad S_2=\frac{P_2}{P_m},\quad \dots,\quad S_{m-1}=\frac{P_{m-1}}{P_m},\quad S_m=\frac{P_m}{P_m}=1$$

La terminologie « *algorithme d'Euclide signé* » fait référence à la présence des signes $-$ dans la définition des restes successifs.

Voici quelques points essentiels mais faciles à prouver :

▷ Pour tout $1 \leqslant k < m-1$, $P_k \wedge P_{k+1} = P_m = P \wedge P'$. On en déduit que $S_k \wedge S_{k+1} = 1$ pour tout $1 \leqslant k < m-1$.

▷ Le polynôme $S_1 = -\dfrac{P}{P \wedge P'}$ est à racines simples et a les mêmes racines que P.

Intéressons-nous à la fonction définie par

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto CS(S_1(x), S_2(x), \ldots, S_m(x)) \end{aligned}$$

Notons $a_1 < \cdots < a_N$ les éléments de l'ensemble *fini*

$$\bigcup_{k=1}^{m-1} S_k^{-1}(\{0\})$$

On déduit du théorème des valeurs intermédiaires que ϕ est constante sur tout intervalle de la forme $]a_k, a_{k+1}[$ où $1 \leqslant k \leqslant N-1$: ϕ est donc une fonction en escalier sur $\mathbb{R}$.

Essayons de comprendre le comportement de $\phi(x)$ quand x est au voisinage de $\alpha \in \{a_1, \ldots, a_N\}$.

▶ **Cas où α est racine du polynôme S_k où $2 \leqslant k \leqslant m-1$**

De l'égalité de division euclidienne

$$S_{k-1} = Q_k \cdot S_k - S_{k+1}$$

évaluée en α, on déduit que $S_{k-1}(\alpha) \cdot S_{k+1}(\alpha) \leqslant 0$. Mais puisque $S_k \wedge S_{k-1} = S_k \wedge S_{k+1} = 1$, α ne peut être une racine des polynômes S_{k-1} et S_{k-1}. Ainsi $S_{k-1}(\alpha) \cdot S_{k+1}(\alpha) < 0$. On déduit alors de la continuité de S_{k-1}, S_k et S_{k+1} en α le tableau de signe suivant :

		$S_{k-1}(x)$	$S_k(x)$	$S_{k+1}(x)$
Cas 1	signe en α^-	$+$	$*$	$-$
	signe en α	$+$	0	$-$
	signe en α^+	$+$	$\square$	$-$
Cas 2	signe en α^-	$-$	$\bullet$	$+$
	signe en α	$-$	0	$+$
	signe en α^+	$-$	$\times$	$+$

Quelquesoit les valeurs de $*, \square, \bullet$ et $\times$ dans $\{\pm\}$, le nombre de changement de signe(s) dans $(S_{k-1}(x), S_k(x), S_{k+1}(x))$ ne varie pas lorsque x « *traverse* » la valeur α.

▶ **Cas où α est racine du polynôme S_1 (i.e. de $P_1 = P$)**

Si α est une racine de multiplicité ν de P, on a $P = (X-\alpha)^\nu \cdot Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$ et $P_m = (X-\alpha)^{\nu-1} \cdot T$ avec $T(\alpha) \neq 0$ d'où

$$P_2 = -P' = -(X-\alpha)^{\nu-1} \cdot \left(\nu \cdot Q + (X-\alpha) \cdot Q'\right) \quad \text{et} \quad S_2 = -\frac{P'}{P_m} = -\frac{\nu \cdot Q + (X-\alpha) \cdot Q'}{T(X)}$$

On en déduit que

$$S_1(x) \underset{\alpha}{\sim} \frac{Q(\alpha)}{T(\alpha)} \cdot (x-\alpha) \quad \text{et} \quad S_2(x) \underset{\alpha}{\sim} -\frac{\nu \cdot Q(\alpha)}{T(\alpha)}$$

D'où le tableau de signe suivant au voisinage de α :

		$S_1(x)$	$S_2(x)$
Cas 1	signe en α^-	$+$	$+$
	signe en α	0	$+$
	signe en α^+	$-$	$+$
Cas 2	signe en α^-	$-$	$-$
	signe en α	0	$-$
	signe en α^+	$+$	$-$

Le nombre de changement de signe(s) dans $(S_1(x), S_2(x))$ varie donc d'une unité lorsque x « *traverse* » la valeur α.

► **Conclusion**

Notons $b_1 < b_2 < \cdots < b_r$ les racines réelles de P. On déduit de l'étude précédente que

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b_1 \\ k & \text{si } b_k \leqslant x < b_{k+1} \text{ où } 1 \leqslant k \leqslant r-1 \\ r & \text{si } x \geqslant b_r \end{cases}$$

D'où la formule suivante, pour tout couple de réels (a,b) tel que $a < b$:

$$\phi(b) - \phi(a) = \text{nombre de racines de } P \text{ dans l'intervalle } [a,b[$$

Nous venons d'établir le théorème de Sturm :

Théorème 3. (Sturm, 1829)
Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et $a < b$. En notant $(S_1,\dots,S_m)$ la suite de Sturm de P et, pour tout réel x, $\phi(x) = CS(S_1(x),\dots,S_m(x))$, on a

$$\phi(b) - \phi(a) = \textit{nombre de racines de } P \textit{ dans l'intervalle } [a,b[$$

Exercice 2. *La méthode de Sturm*

On se propose de programmer la méthode de Sturm sous Maple. Afin d'effectuer du calcul formel, on se contentera d'appliquer la méthode à des nombres a et b rationnels et des polynômes P de $\mathbb{Q}[X]$.

1. Ecrire une fonction **SuiteSturm(P,a)** prenant en argument un polynôme P et renvoyant sous forme d'une liste la suite de Sturm associée à P.

2. Ecrire une procédure **Signes(L)** prenant en argument une liste L de rationnels et renvoyant le nombre de changement de signe de L.

3. Ecrire une fonction **CS(P,a)** prenant en arguments un polynôme P et un nombre a et renvoyant le nombre de changements de signes dans la suite de Sturm du polynôme P que l'on supposera non constant.

4. Ecrire une fonction **NbRacines(a,b)** prenant en argument un polynôme P et deux nombres $a < b$ et renvoyant le nombre de solutions d'un polynôme P dans l'intervalle $[a, b[$.

5. Combien de racines le polynôme $16X^5 - 20X^3 + 5X$ admet-t-il dans l'intervalle $[0, 1]$?

Exercice 3. *Variations sturmiennes*

Nombre de racines réelles d'un polynôme.

1. Ecrire une fonction **CSinfini(P,n)** d'arguments $P \in \mathbb{Q}[X]$ non constant et $n = \pm 1$ et renvoyant le nombre de *changements de signe au voisinage de* $+\infty$ *(si* $n = +1$*) ou* $-\infty$ *(si* $n = -1$*)* dans la suite de Sturm de P.

2. Ecrire une fonction **NbRacinesReelles(P)** prenant en argument un polynôme P non constant et renvoyant le nombre de racines réelles de ce polynôme.

3. Combien de racines réelles le polynôme $X^7 - X^6 - X^3 + 1$ admet-il ?

4. Combien d'entre-elles sont positives ?

3.2. Localisation des racines

Ce paragraphe avancera quelques éléments de réponse à la question suivante : peut-on trouver un disque fermé D (ou un autre compact) contenant toutes les racines réelles d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par ces coefficients ? Nous commenceront par le résultat fondamental suivant :

Théorème 4.
Si au moins un des a_i est non-nul, alors toutes les racines de

$$P = X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot X + a_0$$

sont majorées en module par l'unique racine strictement positive de

$$Q(x) = X^n - \sum_{i=0}^{n} |a_i| \cdot X^i$$

On déduit de résultat de nombreuses bornes possibles.

Théorème 5. (Borne de Cauchy)
Toutes les racines du $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ *sont contenues dans le disque centré à l'origine et de rayon* $1 + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (|a_i|)$.

Le lecteur passionné par ce sujet pourra s'attaquer aux bornes de *Eneström et Kakeya* que l'on obtient également par le théorème 4.

Théorème 6. (Bornes d'Eneström et Kakeya)
Si tous les coefficients du polynôme $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ sont strictement positifs, alors les racines de P sont toutes contenues dans la couronne $\alpha \leqslant |z| \leqslant \beta$, où

$$\alpha = \min_{1\leqslant k\leqslant n} \left|\frac{a_{k-1}}{a_k}\right| \quad \text{et} \quad \beta = \min_{1\leqslant k\leqslant n} \left|\frac{a_{k-1}}{a_k}\right|$$

Exercice 4.

Prouver les théorèmes 4 et 5.

3.3. Séparation des racines

Le théorème de Sturm permet la programation d'une procédure de *séparation des racines* d'un polynôme P, i.e. une procédure renvoyant des intervalles deux à deux disjoints contenant toutes les racines réelles de P.

Exercice 5.

Ecrire une procédure **LocalisationRacines(P)** prenant en argument un polynôme P et renvoyant sous la forme d'une liste de la forme $[r, [a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_r, b_r]]$ le nombre r de racines réelles de P et des intervalles deux à deux disjoints contenant chacun une et une seule des racines réelles de P.

3.4. La règle de Sturm sous Maple

Signalons que le logiciel connaît la règle Sturm de détermination du nombre de racines dans un intervalle donné.

```
> p:=x^3-4*x+1:
  sturm(sturmseq(p,x),x,-infinity,infinity);

                                   3
```

Le lecteur curieux consultera l'aide en ligne.