

TP Maple 3

Suites et séries de fonctions. Cas des séries entières.

*On utilisera avec profit les outils graphiques du logiciel afin d'expérimenter et d'émettre des conjectures. La manipulation des séries entières se fera au moyen des bibliothèques **powseries** et **gfun**.*

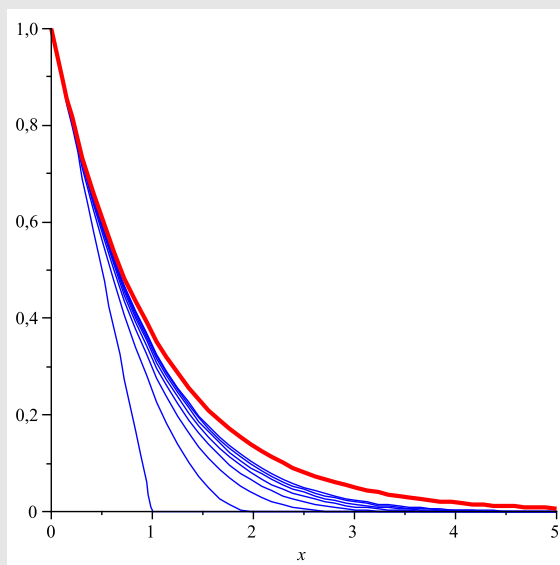
1	Suites de fonctions.....	1
2	Séries de fonctions.....	3
2.1	Un premier exemple d'utilisation	3
2.2	Les limites de Maple	4
3	Cas particulier des séries entières	7
3.1	Utilisation des « moyens élémentaires »	7
3.2	La bibliothèque powseries	8
3.3	La bibliothèque gfun	10

1. Suites de fonctions

Illustrons pour commencer la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$f_n : x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases} \quad \text{vers la fonction } x \mapsto e^{-x}$$

```
> f:=piecewise(x<n,(1-x/n)^n,0): plot([seq(subs(n=k,f),k=1..8),exp(-x)],
x=0..5, color=[seq(blue,k=1..8),red], thickness=[seq(1,k=1..8),3]);
```



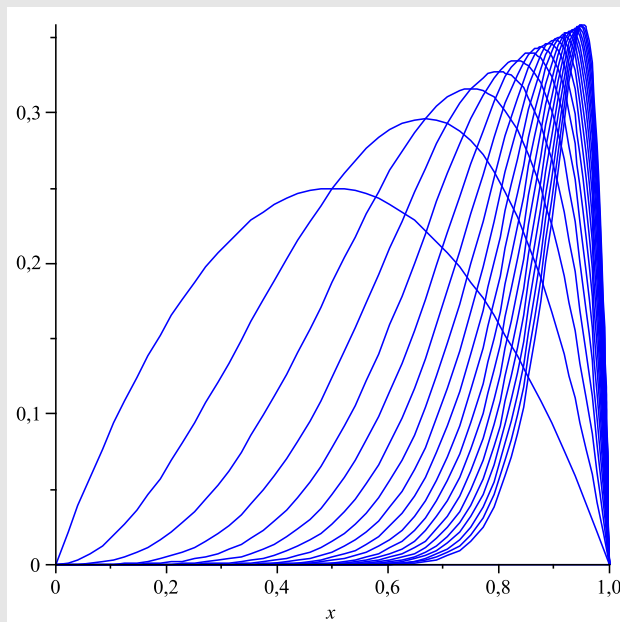
On pourra conjecturer le mode de convergence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ donnée en faisant une étude graphique au moyen de la commande **plot**. Une animation permettra de mieux appréhender le mode convergence de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$. On pourra vérifier les résultats en utilisant des commandes telles que **limit**, en calculant $\|f_n\|_\infty$ (par une étude de fonction), etc.

Etudions à présent la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], f_n(x) = n \cdot x^n \cdot (1 - x)$$

On commence par tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions $f_0, f_1, \dots, f_{20}$.

```
> f:=n*x^n*(1-x): plot([seq(subs(n=k,f),k=0..20)],x=0..1,color=blue);
```



On conjecture qu'il y a convergence simple vers la fonction nulle mais que cette convergence n'est pas uniforme car la suite des maximums semble converger vers une limite non nulle. Voyons cela de plus près...

```
> sol:=solve({diff(f,x)},x);
```

$$sol := \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$$

```
> u:=subs(sol,f): limit(u,n=infinity);
```

$$e^{-1}$$

Rappelons la syntaxe permettant une animation sous Maple :

La commande animate

animate(plotcommand, plotargs, t=a..b, options)

On pourra essayer la ligne suivante...

```
> with(plots):
  animate(plot, [n*x^n*(1-x), x=0..1], n=0..50);
```

Exercice 1.

Pour tout entier naturel n et tout réel x , on pose

$$f_n(x) = \sin(x) \cdot \cos^n(x)$$

1. Conjecturer le mode de convergence de $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathbb{R}$ au moyen d'une animation sous Maple.
2. Démontrer ce résultat en vous aidant du logiciel pour les calculs intermédiaires.

2. Séries de fonctions

On utilisera la commande **sum** pour définir la somme d'une série de fonction. On n'hésitera pas également à étudier les sommes partielles pour se faire une idée.

2.1. Un premier exemple d'utilisation

Posons-nous la question du mode de convergence sur $\mathbb{R}_+$ de la série :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{n \cdot (x+1)}\right)$$

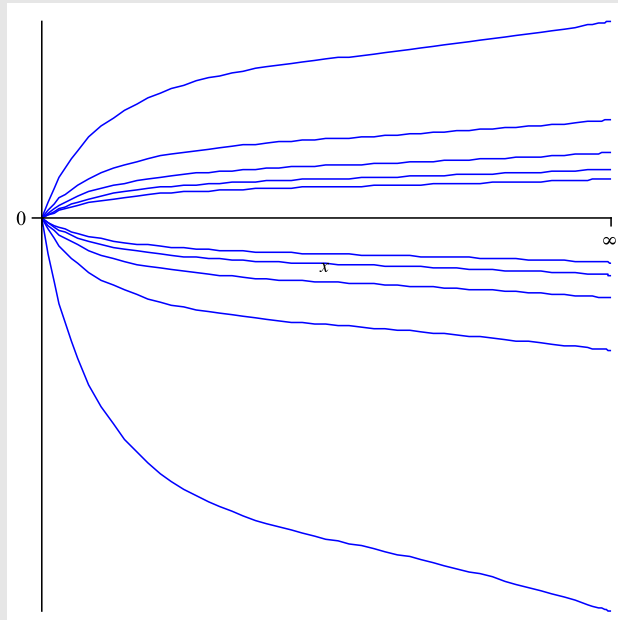
On commence par vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}_+$:

```
> u:=(-1)^(n)*ln(1+x/(n*(1+x))):
> series(u,n=infinity,2);
```

$$\frac{(-1)^n x}{(x+1)n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On peut aussi remarquer que cette série vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. Voici quelques restes...

```
> restes:=sum(u,n=N..infinity):  
plot([seq(subs(N=5*m,restes),m=1..10)],x=0..infinity,color=blue);
```



Il semble que la convergence soit uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Démontrons-le. On a classiquement

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n \cdot \ln \left(1 + \frac{x}{n \cdot (x+1)} \right) \right| \leq \ln \left(1 + \frac{x}{N \cdot (x+1)} \right) \leq \frac{1}{N} \cdot \frac{x}{x+1} \leq \frac{1}{N}$$

Il y a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$. La convergence n'est clairement pas normale sur $\mathbb{R}_+$.

2.2. Les limites de Maple

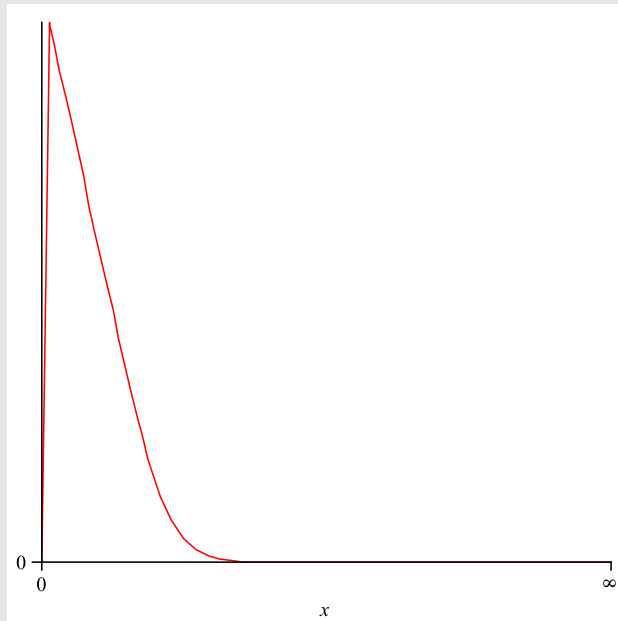
Il faut cependant rester critique face aux résultats (graphiques ou numériques) renvoyés par Maple. Dans le cas où une série à termes continus ne converge pas uniformément, sa somme peut admettre des points de discontinuité. Le logiciel aura alors du mal à tracer le graphe de la somme au voisinage de ses points et il faudra se méfier du graphique renvoyé par Maple. Examinons l'exemple suivant : pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$\begin{aligned} f_n \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \cdot e^{-n^2 \cdot x^2} \end{aligned}$$

et on s'intéresse à la série $S = \sum_{n \geq 1} f_n$. Puisque pour tout réel x , $f_n(x) = o(1/n^2)$ quand n tend vers $+\infty$, S est définie sur $\mathbb{R}$.

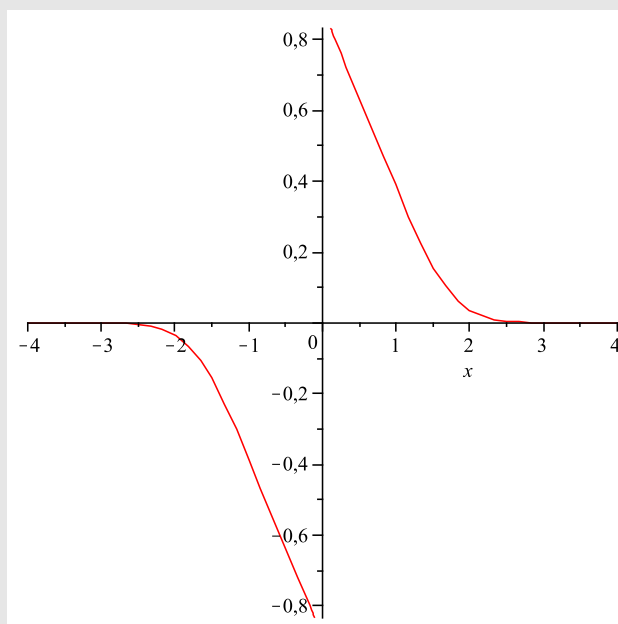
Voyons ce que Maple arrive à nous dire à propos de S ...

```
> f:=x*exp(-n^2*x^2): S:=sum(subs(n=k,f),k=1..infinity):
> plot(S,x=0..infinity);
```



Il semblerait que la fonction S soit continue sur $\mathbb{R}_+$ mais la présence d'un « *pic* » est suspecte. En effet, $\sum f_n$ remplit clairement les hypothèses du théorème de dérivation terme à terme sur tout intervalle de la forme $[a, b]$ avec $0 < a < b$. Il est possible qu'une discontinuité en 0 soit responsable de la courbe observée. Creusons un peu...

```
> plot(S,x=-4..4);
```



Nous avons raison d'être critique face à la première figure : une discontinuité en 0 est envisageable. Etudions cela de plus près. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $x > 0$, on obtient par la méthode des rectangles :

$$x \cdot e^{-(n+1)^2 \cdot x^2} \leq \int_n^{n+1} x \cdot e^{-t^2 \cdot x^2} dt \leq x \cdot e^{-n^2 \cdot x^2}$$

puis, puisque la série et l'intégrale sont convergentes :

$$S(x) - x \cdot e^{-x^2} \leq \int_1^{+\infty} x \cdot e^{-t^2 \cdot x^2} dt \leq S(x)$$

Puis en effectuant le changement de variable $u = tx$:

$$S(x) - x \cdot e^{-x^2} \leq \int_x^{+\infty} e^{-u^2} du \leq S(x)$$

soit encore

$$\int_x^{+\infty} e^{-u^2} du \leq S(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-u^2} du + x \cdot e^{-x^2}$$

On en déduit que

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Comme $S(0) = 0$, la fonction S n'est pas continue au point 0. On en déduit au passage qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2.

Pour tout entier naturel n , on considère

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto n^2 \cdot x^n \cdot (1 - x) \end{aligned}$$

1. Etudier graphiquement le mode de convergence de $\sum f_n$.
2. Prouver votre conjecture.

Exercice 3.

On pose,

$$u_n(x) = \frac{1}{n + x \cdot n^2} \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de S .
2. En utilisant Maple, tracer le graphe de S .
3. Déterminer un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ en utilisant le logiciel. Prouver le résultat obtenu.

Exercice 4.

On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $[0, 1]$ par :

$$f_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, 1], \quad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t)^2 dt$$

1. Programmer un algorithme permettant de calculer les premiers termes et de les visualiser.
2. Conjecturer le mode de convergence de $(f_n)_{n \geq 0}$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n , f_n est majorée par

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}$$

sur $[0, 1[$.

4. Montrer la convergence simple de la suite sur $[0, 1[$, on note f sa limite.
5. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, 1[, \quad f(x) \geq \sum_{k=0}^n x^k$$

En déduire f .

3. Cas particulier des séries entières

On peut utiliser les outils élémentaires comme la commande **sum** et le type **polynom**. Tout autre manipulation sur les séries entières pourra se faire en chargeant au préalable une librairie ad hoc. Il existe deux librairies sous Maple permettant la manipulation formelle des séries entières. Nous en donnerons un bref aperçu dans les deux paragraphes qui suivent.

3.1. Utilisation des « moyens élémentaires »

Les développements en série entière classiques pourront être calculés au moyen de la commande **sum**.

```
> sum(x^n/n, n=1..infinity);
```

$$-\ln(1-x)$$

En utilisant des polynômes, on pourra définir et manipuler les sommes partielles d'une série entière.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2 \cdot f(x)^2 - f(2 \cdot x) = 1$$

On suppose que f est développable en série entière au voisinage de 0. On écrit alors, au voisinage de 0,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} \cdot x^n$$

1. En utilisant le logiciel, conjecturer les expressions possibles de $f(x)$.
2. Prouver cette conjecture.

3.2. La librairie powseries

En utilisant la librairie **powseries**¹ de Maple, on pourra manipuler les séries entières.

```
> with(powseries);

[compose, evalpow, inverse, multconst, multiply, negative, powadd, powcos, powcreate,
powdiff, powexp, powint, powlog, powpoly, powsin, powsolve, powsqrt, quotient, reversion,
subtract, tpsform]
```

On pourra créer la série entière définie par une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ au moyen de la commande **powcreate**. On remarquera que cette commande accepte les relations de récurrences².

```
> powcreate(u(n)=1): powcreate(v(n)=v(n-1)+1,v(0)=1): w:=multiply(u,v):
tpsform(w, x, 10);
```

$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + 28x^6 + 36x^7 + 45x^8 + 55x^9 + O(x^{10})$$

La série entière créée par **powcreate(u(n)=...)** sera automatiquement appelée u . La fonction **tpsform** permet d'écrire la troncature³ d'une série entière donnée à un ordre arbitrairement choisi. Il ne s'agit ni plus ni moins que du développement de Taylor en 0 de la somme de cette série. On pourra accéder à la valeur du coefficient w_n par **w(n)** mais le logiciel ne retournera le résultat que pour des valeurs numériques de n .

1. *Séries entières* se dit *power series* en anglais.

2. Mais pas toutes...

3. *Truncated power series* in english.

```
> w(2), w(0), w(n);
```

$$6, 1, w(n)$$

Les séries entières définies précédemment sont bien connues des lecteurs et vérifient clairement

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad v(x) = u'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\text{et } w(x) = u(x) \cdot v(x) = u(x) \cdot u'(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{(u^2)'(x)}{2}.$$

On peut vérifier cette dernière égalité sur les troncatures mais pas davantage...

```
> f:=evalpow(u^2): g:=powdiff(f): h:=multconst(g,1/2): tpsform(h,x,10);
```

$$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} + O(x^{10})$$

La commande **powsolve** permet de trouver les solutions développables en séries entières d'une équation différentielle donnée (avec ou sans conditions initiales).

```
> f:=powsolve({diff(y(x),x)-y(x)=0, y(0)=1}): tpsform(f, x, 4);
```

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4)$$

Chacun aura reconnu la fonction exponentielle.

Séries entières avec la librairie **powseries**

- **powcreate(expression de u_n)** : crée la série entière u définie par $\sum u_n \cdot x^n$.
- **powcreate(relation de récurrence sur u_n avec conditions initiales)** : crée la série entière u définie par $\sum u_n \cdot x^n$.
- **f:=powsolve(EDL avec conditions initiales)** : en cas d'existence, crée la solution développable en série entière de l'EDL donnée.
- **tpsform(f,x,n)** : renvoie le développement de Taylor de f en 0 (la variable étant x) à l'ordre n .
- **u(k)** : renvoie la valeur de u_k pour $u = \sum u_n \cdot x^n$.

Exercice 6.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant $\forall n \geq 0$,

$$u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n$$

On admet ici que le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} u_n \cdot x^n$$

est non nul. On note S sa somme.

1. Calculer explicitement $S(x)$ en utilisant Maple. On pourra utiliser la commande **convert** avec l'option **ratpoly**.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

On l'aura compris au travers de ces quelques exemples, la librairie **powseries** sera d'un intérêt limité dans les cas où l'on recherche des développements en série entière car aucune commande ne permet d'accéder à l'expression générale du coefficient u_n . La librairie **gfun** sera plus utile⁴ dans ce contexte.

3.3. La librairie **gfun**

Commençons par quelques définitions sur les séries génératrices. A toute suite de nombre complexe $(a_n)_{n \geq 0}$ on peut associer deux séries :

$$\sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} \cdot z^n$$

appelées respectivement *série génératrice (ordinaire)* et *série génératrice exponentielle* de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$. Sous réserve de convergence, ces séries permettent souvent d'obtenir des renseignements utiles⁵ sur la suite $(a_n)_{n \geq 0}$. Citons par exemple la résolution des relations de récurrence, i.e. le calcul explicite de a_n en fonction de n lorsque $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifie une relation de récurrence donnée. En utilisant la librairie **gfun**⁶ de Maple, on pourra manipuler les séries génératrices.

```
> with(gfun);
```

```
[Laplace, Parameters, algebraicsubs, algeqtodiffeq, algeqtoseries, algfuntoalgeq, borel,
cauchyproduct, diffeq*diffeq, diffeq+diffeq, diffeqtohomdiffeq, diffeqtorec, gfunParameters,
guesseqn, guessgf, hadamardproduct, holxpertodiffeq, invborel, listtoalgeq, listtodiffeq,
listtohypergeom, listtolist, listtoratpoly, listtorec, listtoseries, poltodiffeq, poltorec,
ratpolytocoeff, rec*rec, rec+rec, rectodiffeq, rectohomrec, rectoproc, seriestoalgeq,
seriestodiffeq, seriestohypergeom, seriestolist, seriestoratpoly, seriestorec, seriestoseries]
```

4. mais n'attendez pas trop de miracles tout de même...

5. Elles sont également très utilisées pour le calcul des probabilités.

6. *Fonction génératrice* se dit *generating function* en anglais.

Sans entrer dans les détails, l'utilisateur de **gfun** pourra notamment déduire d'une EDL (**E**) la relation de récurrence vérifiée par les coefficients d'une solution de (**E**) développable en série entière. Les outils de résolution de Maple et en particulier **rsolve**, le solveur de récurrences du logiciel, pourront s'avérer utiles dans ce contexte pour expliciter les coefficients. Revenons à l'exemple du paragraphe précédent.

```
> rec:=diffeqtoec({(1-z)*(diff(y(z),z))-3*y(z)=0,y(0)=1},y(z),v(n)),
  rsolve(rec,v);
```

$$v(0) = 1, (-3 - n)v(n) + (n + 1)v(n + 1), \frac{1}{2}(n + 2)(n + 1)$$

On en déduit donc que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \cdot x^n$$

La librairie **gfun**

- **diffeqtoec** : permet de trouver la relation de récurrence linéaire à coefficients polynomiaux correspondant à une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux.
- **rectodiffeq** : permet de trouver l'équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux correspondant à une relation de récurrence linéaire à coefficients polynomiaux.

Exercice 7.

Soient $k \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $a_0 = 1$, $\forall n \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{2 \cdot n + k}{n + 1} \cdot a_n$. On note

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Montrer que le rayon de convergence de cette série est non nul.
2. En utilisant Maple, trouver une équation différentielle vérifiée par f au voisinage de 0.
3. Toujours à l'aide du logiciel, expliciter $f(x)$.