1. Nombres réels et suites

- *Propriétés algébriques de* $\mathbb{R}$: structure de corps de $\mathbb{R}$, rappels de quelques formules usuelles.
- *L'ordre* $\leqslant$ *sur* $\mathbb{R}$: rappels, manipulation des inégalités, compatibilité avec les opérations, la valeur absolue.
- *La propriété de la borne supérieure* : énoncé de la propriété de la borne supérieure, caractérisation d'une borne supérieure.
- *Partie entière d'un nombre réel* : définition, propriétés.
- *Convergence d'une suite* : définition, propriétés et règles de calcul.
- *Les trois grands théorèmes* : théorème d'encadrement, théorème des suites monotones, suites adjacentes.
- *Parties denses* : définition, exemples, densité et suites.
- *Suites extraites* : définitions, propriétés et utilisation des suites extraites.

2. Questions de cours

Question de cours 1.

Enoncé et preuve du théorème d'encadrement (dans le cas d'une limite finie).

Question de cours 2.

Passage à la limite dans les inégalités : si deux suites convergentes $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifient $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim(u_n) \leqslant \lim(v_n)$.

Question de cours 3.

Enoncé et preuve du théorème des suites monotones (dans le cas où la suite est croissante).

Question de cours 4.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs. Prouver que si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\ell < 1$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors $\lim(u_n) = 0$. En déduire que $n! \ll n^n$.

Question de cours 5.

Démonstration de $\lim(u_n) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim(v_n) = \ell_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim(u_n v_n) = \ell_1 \ell_2$.

Question de cours 6.

Si $\lim(u_n) = \ell \in \mathbb{R}^*$, u_n est du signe de ℓ à partir d'un certain rang.

Question de cours 7.

Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. Méthodes à maîtriser

- Connaître l'alternative du théorème des suites monotones.
- Connaître le theorème des suites adjacentes et se souvenir que les deux suites permettent d'obtenir des valeurs approchées par défaut et par excès de la limite commune à une précision arbitraire.
- Savoir passer à la limite dans les inégalités (attention : on n'obtient que des inégalités larges !).
- Savoir énoncer la propriété de la borne supérieure et connaître sa caractérisation,

$$M = \sup(A) \iff \text{❶ } \forall a \in A,\ a \leqslant M \quad , \quad \text{❷ } \forall \epsilon > 0,\ \exists a \in A\ ,\ M - \epsilon \leqslant a.$$

- Connaître les règles usuelles de manipulation des inégalités.

► Connaître la définition de $\lfloor x \rfloor$ et sa caractérisation par

$$\forall k \in \mathbb{Z} \ , \ \lfloor x \rfloor = k \iff k \leqslant x < k+1.$$

Ceci équivaut également à $x-1 < k \leqslant x$.

► Connaître la définition de la densité dans $\mathbb{R}$ de $A \subset \mathbb{R}$.

► Un majorant M d'une partie A de $\mathbb{R}$ est égal à $\sup(A)$ *si et seulement si* il existe une suite d'éléments de A convergeant vers M.

► Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ *si et seulement si* tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

4. Prochainement dans nos salles

► *L'analyse réelle* : limites, continuité, dérivation, intégration.

► *Le retour de l'algèbre linéaire* : matrices, dualité, déterminants et systèmes linéaires.

► *Back to real analysis* : développement limités, suites remarquables, courbes planes.

► *Algèbre bilinéaire.*