1. Espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

▸ *Introduction à la notion d'espace vectoriel* : exemples, définition, exemple de $\mathbb{K}^n$.

▸ *Règles de calcul* : règle sur $\lambda \cdot x = 0$, combinaisons linéaires.

▸ *Sous-espaces vectoriels* : définition, caractérisation des sev, intersection de sev, sous-espace vectoriel engendré par une partie X de E, somme de deux sev, somme directe de deux sev, sev F et G supplémentaires dans E, projection sur F parallélement à G d'un vecteur x lorsque $E = F \oplus G$.

▸ *Familles libres, familles génératrices et bases* : définitions, critère usuel pour les familles libres, sur-famille d'une famille libre ou génératrice, sous-famille d'une famille libre ou génératrice, bases d'un $\mathbb{K}$-ev.

▸ *Théorie de la dimension* : définition de la définition finie, lemme de Steinitz, existence d'une base en dimension finie, définition de la dimension, théorème de la base incomplète, théorème de la base extraite, existence d'un supplémentaire en dimension finie, caractérisation des bases en dimension n.

▸ *Calculs de dimensions* : dimension d'une somme (cas d'une somme directe puis application à la formule de Grassmann), application aux sev supplémentaires.

▸ *Rang d'une famille de vecteurs* : définition, rang et familles libres, méthode du pivot de Gauss pour le calcul du rang, application à la détermination de relations de liaisons entre vecteurs, extraction d'une base à partir d'une famille génératrice.

2. Questions de cours

Question de cours 1.

Dimension d'une somme directe de deux sev de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-ev E.

Question de cours 2.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E de dimension finie. Alors $F+G$ est de dimension finie et

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

On admettra la formule pour une somme directe de deux sev (cf. question de cours précédente) et le théorème sur la dimension (et l'existence) d'un supplémentaire.

Question de cours 3.

Théorème du rang.

▸ *Enoncer* le théorème du rang.

▸ *Prouver* le lemme sur l'isomorphisme entre tout supplémentaire du noyau de f dans l'espace de départ et l'image de f.

▸ *Prouver* le théorème du rang.

Question de cours 4.

Etablir que s'il existe un isomorphisme $f : E \to F$ et que $\dim(E) < +\infty$ alors F et de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$.

Question de cours 5.

Projections et projecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev.

▸ *Donner* la définition d'un projecteur d'un $\mathbb{K}$-ev E.

▸ On suppose que $E = F \oplus G$. *Donner* la définition de la projection de E sur F parallélement à G.

▸ *Prouver* que toute projection de E est un projecteur de E.

▸ *Prouver* que tout projecteur p de E est la projection de E sur $\mathrm{Im}(p)$ parallélement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Question de cours 6.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec $\dim(E) = \dim(F) < +\infty$. *Etablir* l'équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.

Question de cours 7.

Groupe linéaire d'un $\mathbb{K}$-ev E.

► *Donner* la définition de $GL(E)$.

► *Prouver* que la composée de deux automorphismes de E est un automorphisme de E.

► *Prouver* que la bijection réciproque d'un automorphisme de E est un automorphisme de E.

► *En déduire* que $(GL(E), \circ)$ est un groupe.

3. Méthodes à maîtriser

► Savoir déterminer le rang d'une famille de vecteurs par la méthode du pivot de Gauss.

► Savoir déterminer des relations de liaison entre vecteurs.

► $\text{rg}(f_1, \ldots, f_m) = m$ *si et seulement si* $(f_1, \ldots, f_m)$ est libre.

► Si $F = \text{vect}(f_1, \ldots, f_m)$ et $G = \text{vect}(g_1, \ldots, g_n)$, alors $F + G = \text{vect}(f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n)$.

► Connaître les différentes manières de prouver que $F \subset E$ est un sev de E : la caractérisation usuelle, F est une intersection de sev de E ou reconnaître que $F = \text{vect}(\ldots)$.

► Connaître la définition des sev supplémentaires et des projections associées.

► Savoir qu'en dimension n,

$$(e_1, \ldots, e_n) \text{ est une base} \iff (e_1, \ldots, e_n) \text{ est libre} \iff (e_1, \ldots, e_n) \text{ est génératrice.}$$

► Savoir qu'en dimension finie, F et G sont supplémentaires dans E *si et seulement si* $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $F \cap G = \{0\}$, *si et seulement si* $E = F + G$ et $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$.