Mathématiques

Devoir libre n^{o} 10

à rendre le jeudi 10 mars 2011

Polynômes

- **L'usage de la calculatrice est interdit durant l'épreuve.**
- **Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.**
- **Si le candidat découvre en cours d'épreuve ce qu'il croît être une erreur d'énoncé, il le précisera dans sa copie.**
- **L'épreuve comporte un problème sur les polynômes.**

Problème

Autour des polynômes de Hilbert

On pose

$$H_0 = 1 \quad \text{et, } \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad H_k = \frac{1}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(X-\ell) = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

On définit ainsi une famille de polynômes réels $(H_k)_{n\in\mathbb{N}}$ appelés *polynômes de Hilbert*. Les parties **1.** et **2.** exposent quelques résultats fondamentaux liés aux polynômes d'Hilbert. Ces propriétés classiques seront largement utilisées dans les parties **3.** et **4.** qui sont indépendantes l'une de l'autre. La partie **5.** n'utilise que la première question de la partie **3.**

Partie 1 — *Décomposition d'un polynôme dans la base de Hilbert*

Pour tout entier naturel n, on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

1.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Etablir que $\mathscr{B}_n = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de E_n.

1.2. Vérifier que $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ définit un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$.

1.3. *Calcul des coordonnées d'un polynôme P de E_n dans la base $\mathscr{B}_n$.* Cette question a pour but de montrer que

$$\forall P \in E_n, \quad P = \sum_{k=0}^{n} \left(\Delta^k(P)\right)(0) \cdot H_k$$

où Δ^k désigne la k-ième puissance de Δ pour la composition des endomorphismes.

1.3.a. Calculer $\Delta(H_0)$.

1.3.b. Soit $1 \leqslant \ell \leqslant n$. Etablir que $\Delta(H_\ell) = H_{\ell-1}$.

1.3.c. En déduire, pour tous $0 \leqslant \ell \leqslant n$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, que

$$\Delta^k(H_\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > \ell \\ H_{\ell-k} & \text{si } k \leqslant \ell \end{cases}$$

puis que

$$\left(\Delta^k(H_\ell)\right)(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ 1 & \text{si } k = \ell \end{cases}$$

1.3.d. En déduire que, $\forall 0 \leqslant \ell \leqslant n$,

$$H_\ell = \sum_{k=0}^{n} \left(\Delta^k(H_\ell)\right)(0) \cdot H_k$$

1.3.e. Conclure.

1.4. *Application numérique.* Décomposer $X^2 + X + 1$ dans la base (H_0, H_1, H_2) de $\mathbb{R}_2[X]$.

Partie 2 — *Etude de l'endomorphisme* Δ *de* $\mathbb{R}[X]$

On rappelle que l'endomorphisme $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ est défini par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

2. 1. Calculer $\text{Ker}(\Delta)$. Peut-on en conclure que Δ n'est pas surjectif ?

2. 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note Δ_n la restriction de Δ à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

2. 2. a. Justifier que $\Delta_n \in \mathscr{L}(E_n)$.

2. 2. b. Déterminer $\text{Im}(\Delta_n)$. On pourra utiliser les résultats des questions **1.3.a.** et **1.3.b.**

2. 2. c. En déduire que Δ est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}[X]$.

2. 3. *Application numérique.* On recherche dans cette question *tous* les polynômes Q de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $\Delta(Q) = X^2 + X + 1$.

2. 3. a. Trouver une solution particulière Q_0 de $\Delta(Q) = X^2 + X + 1$. On utilisera le résultat de la question **1.4.**

2. 3. b. Conclure.

Partie 3 — *Application aux polynômes réels tels que* $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$

On se propose de *caractériser*, au moyen des polynômes de Hilbert, les polynômes réels P tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(k) \in \mathbb{Z}$$

3. 1. Soient ℓ et k deux entiers naturels. Etablir que

$$H_k(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > \ell \\ \dbinom{\ell}{k} & \text{si } k \leqslant \ell \end{cases}$$

3. 2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$. Etablir que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left(\Delta^k(P)\right)(0) \in \mathbb{Z}$.

3. 3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme réel appartenant à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$. Déduire de ce qui précède l'équivalence des deux propositions suivantes :

1. P est une combinaison linéaire *à coefficients entiers relatifs* de $H_0, H_1, \ldots, H_n$;
2. $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$.

Partie 4 — *Application à une suite récurrente polynomiale*

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite *fixée* de nombres réels telle qu'il existe un polynôme P réel vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = u_k + P(k)$$

4. 1. Etablir qu'un tel polynôme P est unique.

4. 2. *Etude de trois cas particuliers.*

4. 2. a. Que dire de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque $P = 0$?

4. 2. b. Calculer u_k en fonction de k et u_0 lorsque $P(X) = 1$.

4. 2. c. Calculer u_k en fonction de k et u_0 lorsque $P(X) = X$. On pourra effectuer un telescopage à partir de $u_{k+1} - u_k$.

4. 3. On suppose ici P de degré $n \geqslant 0$.

4. 3. a. Etablir l'existence d'un polynôme réel Q tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ Q(k+1) - Q(k) = P(k)$$

4. 3. b. Que dire de la suite de terme général $v_k = u_k - Q(k)$?

4. 3. c. En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ u_k = \lambda + Q(k)$$

4. 4. *Application numérique.* Déterminer u_k en fonction de k et u_0 lorsque $P(X) = X^2 + X + 1$.

Partie 5 — *Factorisation d'un polynôme*

Pour tout entier naturel n, on pose

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot H_k$$

5. 1. Déduire de la question **3.1.** que

$$\forall 1 \leqslant \ell \leqslant n,\ \ T_n(\ell) = 0$$

5. 2. Etablir qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$T_n = \lambda \cdot \prod_{\ell=1}^{n} (X - \ell)$$

5. 3. Justifier que $\lambda = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n!}$.

5. 4. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ T_n = (-1)^n \cdot H_n(X-1)$$