Mathématiques

Devoir libre n° 12

à rendre le lundi 28 mars 2011

Nombres réels et suites

- **L'usage de la calculatrice est interdit durant l'épreuve.**
- **Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.**
- **Si le candidat découvre en cours d'épreuve ce qu'il croît être une erreur d'énoncé, il le précisera dans sa copie.**
- **L'épreuve comporte trois exercices sur les suites.**

Exercice 1 — *Posé à l'oral de l'Ecole Polytechnique dans la filière PSI en 2010*

Soit, pour tout entier naturel n non nul, D_n l'ensemble des diviseurs de n dans $\mathbb{N}$, $d_n = |D_n|$ et

$$u_n = d_1 + \cdots + d_n$$

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant k \leqslant n$. On note M_k l'ensemble des multiples entiers de k compris entre 1 et n au sens large.

1.a. Calculer $|M_k|$ au moyen de la partie entière.

1.b. Etablir que

$$u_n = \sum_{\ell=1}^{n} |M_\ell|$$

2. Montrer que

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ell\text{n}(n)$$

3. En déduire que

$$u_n \sim n \cdot \ell\text{n}(n)$$

Exercice 2 — *Supplice binomial*

Cet exercice a pour but de déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \left(\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right)^{1/n(n+1)}$$

On considère les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = \ell\text{n}(x)$ et $g(x) = x \cdot \ell\text{n}(x)$ et les suites de termes généraux

$$F_n = \sum_{j=1}^{n} f(j) \qquad \text{et} \qquad G_n = \sum_{j=1}^{n} g(j)$$

1. Etudier les variations des fonctions f et g.

2. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer les primitives des fonctions f et g.

3. *On cherche dans la suite de l'exercice à estimer les ordres de grandeur de F_n et de G_n.*

3.a. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout entier k compris entre 1 et $n-1$,

$$f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k+1)$$

En déduire l'encadrement, $\forall n \geqslant 2$,

$$n\,\ell\text{n}(n) - n + 1 \leqslant F_n \leqslant n\,\ell\text{n}(n) - n + f(n) + 1$$

puis un équivalent simple de F_n.

3.b. Démontrer que, $\forall n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{2}\cdot n^2\cdot \ell\mathrm{n}(n)-\frac{1}{4}\cdot n^2+\frac{1}{4}\leqslant G_n \quad \text{et} \quad G_n\leqslant \frac{1}{2}\cdot n^2\cdot \ell\mathrm{n}(n)-\frac{1}{4}\cdot n^2+g(n)+\frac{1}{4}$$

En déduire un équivalent simple de G_n.

3.c. Déduire des questions précédentes que

$$F_n=\mathrm{o}\left(n^2\right) \quad \text{et que} \quad 2\cdot G_n-n\cdot F_n\sim\frac{n^2}{2}$$

4. *Revenons à présant au sujet de l'exercice : les ordres de grandeurs de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vont nous permettre de déterminer le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

4.a. On pose $v_n=\ell\mathrm{n}(u_n)$. Démontrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$,

$$v_n=\frac{1}{n\cdot(n+1)}\cdot\left((n+1)\cdot\ell\mathrm{n}\,(n!)-2\cdot\sum_{k=1}^{n}\ell\mathrm{n}\,(k!)\right)$$

4.b. En intervertissant l'ordre des sommations, vérifier que, pour tout entier $n\geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}\ell\mathrm{n}(j)\right)=(n+1)\cdot F_n-G_n$$

En déduire que

$$\forall n\geqslant 1,\qquad v_n=\frac{2\cdot G_n-(n+1)\cdot F_n}{n\cdot(n+1)}$$

4.c. Conclure.

Exercice 3 — *Suite définie implicitement*

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par

$$f_n(x)=-1+x+\cdots+x^n=-1+\sum_{k=1}^{n}x^k$$

pour $x\in\mathbb{R}$.

1. *On veut montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n\in]1/2,1]$ tel que $f_n(u_n)=0$.*

1.a. Que vaut f_1 ? En déduire que le résultat est vrai pour $n=1$, et donner la valeur de u_1.

1.b. Expliciter f_2, donner la valeur de u_2, et montrer que $u_2<1$.

1.c. On suppose ici que n est un entier fixé supérieur ou égal à 2. Quel est le signe de $f_n(1)$? Montrer que

$$f_n(1/2)=-\frac{1}{2^n}$$

Prouver finalement l'existence et l'unicité de $u_n\in]1/2,1[$ tel que $f_n(u_n)=0$.

2. *Etude de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.*

2.a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

2.b. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^n = 0$$

2.c. Montrer que $u_n \cdot (2-(u_n)^n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.d. Déduire des questions précédentes que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Corrigé de l'exercice 1 — *Posé à l'oral de l'Ecole Polytechnique dans la filière PSI en 2010*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant k \leqslant n$. On note M_k l'ensemble des multiples entiers de k compris entre 1 et n au sens large.

1.a. Un multiple $m \cdot k$ de k est compris entre 1 et n *si et seulement si* $1 \leqslant m \cdot k \leqslant n$, ce qui équivaut à

$$\frac{1}{k} \leqslant m \leqslant \frac{n}{k}$$

Puisque $1/k \leqslant 1$, le nombre d'entiers compris entre $1/k$ et n/k vaut $\lfloor n/k \rfloor$. Ainsi

$$|M_k| = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

1.b. Notons Ω l'ensemble des couples (p,q) d'entiers naturels vérifiant $1 \leqslant p \leqslant n$, $1 \leqslant q \leqslant n$ et $p|q$. A k fixé entre 1 et n, on dénombre $d_k = |D_k|$ éléments de Ω ayant pour seconde composante k, Ainsi,

$$|\Omega| = \sum_{k=1}^{n} |D_k| = u_n$$

De même, à k fixé entre 1 et n, on dénombre $|M_k|$ éléments de Ω ayant pour première composante k ainsi,

$$|\Omega| = \sum_{k=1}^{n} |M_k|$$

d'où

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} |M_k|$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la méthode des rectangles à la fonction continue, positive et décroissante $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. On a

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{dt}{t}$$

d'où

$$\ell\mathrm{n}(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ell\mathrm{n}(n) + 1$$

Puisque $\ell\mathrm{n}(n+1) \sim \ell\mathrm{n}(n)$ et $1 \ll \ell\mathrm{n}(n)$, on déduit du théorème d'encadrement que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ell\mathrm{n}(n)$$

3. On a

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

Or, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$\frac{n}{k} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leqslant \frac{n}{k}$$

d'où, par superposition de ces n inégalités,

$$n \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - n < u_n \leqslant n \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$$

et, d'après la question précédente,

$$n \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \sim n \cdot \ell\mathrm{n}(n) \gg -n$$

ainsi

$$u_n \sim n \cdot \ell\mathrm{n}(n)$$

par le théorème d'encadrement.

Corrigé de l'exercice 2 — *Supplice binomial*

1. Allons-y...

► On *sait* que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, qu'elle tend vers $-\infty$ au voisinage de 0 et vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

► La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme produit de fonctions dérivables) et $g'(x) = 1 + \ell n(x)$ pour tout $x > 0$. Par conséquent, la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, 1/e]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[1/e, +\infty[$. Elle tend vers 0 (par valeurs inférieures) au voisinage de 0, elle est nulle en $x = 1$ et elle tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$: la fonction g est donc strictement négative sur $]0, 1/e[$ et strictement positive sur $]1/e, +\infty[$.

2. Puisque l'énoncé demande d'intégrer par parties...

$$\begin{aligned}\int \ell n(x)dx &= \int 1.\ell n(x)dx\\ &= x\ell n(x) - \int \frac{x}{x}dx\\ &= x\ell n(x) - x\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int x\ell n(x)dx &= \frac{x^2}{2}\ell n(x) - \int \frac{x^2}{2x}dx\\ &= \frac{x^2}{2}\ell n(x) - \frac{x^2}{4}\\ &= \frac{x^2}{4}\big(2\ell n(x) - 1\big)\end{aligned}$$

3. *Ordres de grandeurs de F_n et G_n.*

3.a. Comme la fonction f est croissante sur le segment $[k, k+1]$, $\forall t \in [k, k+1]$,

$$f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k+1).$$

Après intégration sur cet intervalle, on en déduit que

$$\int_k^{k+1} f(k)dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k+1)dt,$$

donc

$$f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k+1).$$

Additionnons ces encadrements , k variant de 1 à $n-1$; d'après la relation de Chasles,

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leqslant \int_1^n f(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=2}^{n} f(k)$$

ainsi

$$F_n - f(n) \leqslant \int_1^n f(t)dt \leqslant F_n - f(1) = F_n.$$

On déduit alors de la question **b.** que

$$n\ell n(n) - n + 1 \leqslant F_n \leqslant f(n) + n\ell n(n) - n + 1$$

D'après l'encadrement précédent,

$$F_n \sim n\ell n(n)$$

par croissances comparées.

3.b. On procède de la même manière, puisque la fonction g est croissante sur $[1, +\infty[$. On obtient alors

$$G_n - g(n) \leqslant \int_1^n g(t)dt \leqslant G_n - g(1) = G_n.$$

On déduit alors du **2.** que

$$\frac{n^2}{4}\left[2\ell n(n) - 1\right] + \frac{1}{4} \leqslant G_n$$

$$G_n \leqslant \frac{n^2}{4}\left[2\ell n(n) - 1\right] + \frac{1}{4} + g(n).$$

Par croissances comparées, on en déduit que

$$G_n \sim \frac{n^2}{2}\ell n(n).$$

3.c. Comme

$$F_n \sim n\ell n(n)$$

et que

$$n\ell n(n) = o\left(n^2\right),$$

on a

$$F_n = o\left(n^2\right).$$

D'après les encadrements de **c.** et **d.**,

$$\frac{n^2}{2} - n + \frac{1}{2} \leqslant 2G_n - nF_n$$

$$2G_n - nF_n \leqslant \frac{n^2}{2} + 2n\ell n(n) - n + \frac{1}{2}.$$

Comme les termes extrêmes de cet encadrement sont équivalents à $n^2/2$, on en déduit que

$$2G_n - nF_n \sim n^2/2.$$

4. *Conclusion.*

4.a. D'après l'expression des coefficients binomiaux comme quotients de factorielles,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \ell n\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \left[\sum_{k=0}^{n} \ell n(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ell n(k!) - \sum_{k=0}^{n} \ell n\left((n-k)!\right) \right] \\ &= \frac{(n+1)\,\ell n(n!) - 2\sum_{k=0}^{n} \ell n(k!)}{n(n+1)} \end{aligned}$$

le changement d'indice $k \leftrightarrow n-k$ montrant que

$$\sum_{k=0}^{n} \ell n\left((n-k)!\right) = \sum_{k=0}^{n} \ell n(k!)$$

4.b. Intervertissons l'ordre de sommation :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \ell n(j) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \ell n(j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (n-j+1)\,\ell n(j) \\ &= (n+1) \sum_{j=1}^{n} \ell n(j) - \sum_{j=1}^{n} j\,\ell n(j) \\ &= (n+1)F_n - G_n. \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} \ell n(k!) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \ell n(j) = (n+1)F_n - G_n$$

et, de façon analogue,

$$(n+1)\,\ell n(n!) = (n+1)F_n.$$

D'après la question **f.**,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{(n+1)F_n - 2\big((n+1)F_n - G_n\big)}{n(n+1)} \\ &= \frac{2G_n - (n+1)F_n}{n(n+1)} \end{aligned}$$

4.c. D'après **e.**,

$$\begin{aligned} 2G_n - (n+1)F_n &= 2G_n - nF_n + \mathrm{o}\left(n^2\right) \\ &= \frac{n^2}{2} + \mathrm{o}\left(n^2\right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{2G_n - (n+1)F_n}{n(n+1)} &= \frac{n^2/2 + \mathrm{o}\left(n^2\right)}{n^2 + \mathrm{o}\left(n^2\right)} \\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1). \end{aligned}$$

Par conséquent , la suite de terme général v_n tend vers $1/2$ et la suite de terme général u_n tend vers $\sqrt{e} = e^{1/2}$ (puisque la fonction exp est continue).

Corrigé de l'exercice 3 — *Suite définie implicitement*

1. 1.a. $f_1(x) = -1 + x$. L'équation $f_n(x) = 0$ admet comme unique solution sur $\mathbb{R}$ $u_1 = 1 \in]1/2, 1]$.

1.b. $f_2(x) = -1 + x + x^2$. Les solutions de $f_2(x) = 0$ sont $\alpha = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\beta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Comme $2 < \sqrt{5} < 3$, on a $\beta \in]1/2, 1[$, donc $u_2 = \beta$ et on a bien $u_2 < 1$.

1.c. $f_n(1) = -1 + n > 0$ car $n \geqslant 2$. D'après la formule sur les suites géométriques, on sait que :

$$f_n(x) = -1 + x\frac{1-x^n}{1-x} \quad \text{pour } x \neq 1,$$

En particulier, pour $x = 1/2$, on obtient $f_n(1/2) = -1 + 1 - \dfrac{1}{2^n} = -\dfrac{1}{2^n} < 0$. Puisque f_n est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[1/2, 1]$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que f_n

admet au moins un zéro sur $]1/2,1[$. Par ailleurs, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1} > 0$ pour tout $x > 0$, donc f_n est strictement croissante sur $[1/2,1]$. Il s'ensuit que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement une solution sur $]1/2,1[$.

2. **2.a.** Fixons $n \geqslant 1$. Puisqu'on a vu que f_n est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, $u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n) = 0$. Or pour tout $x > 0$, on a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} > 0$. En particulier on a donc $f_{n+1}(u_{n+1}) - f_n(u_{n+1}) > 0$, c'est-à-dire $f_n(u_{n+1}) < 0$ puisque par définition $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. Ainsi, on a bien montré que $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \geqslant 1$, donc que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

2.b. Par décroissance, on a $u_n \leqslant u_2$ et donc $(u_n)^n \leqslant (u_2)^n$ pour tout $n \geqslant 2$. Par ailleurs, $u_n \geqslant 0$ donc $0 \leqslant (u_n)^n \leqslant (u_2)^n$ pour tout $n \geqslant 2$. Comme $u_2 \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_2)^n = 0$. Le théorème des gendarmes assure alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = 0$.

2.c. L'égalité demandée est triviale pour $n = 1$ car $u_1 = 1$.

Pour $n \geqslant 2$, on a $u_n \leqslant u_2 < 1$, et on utilise que $f_n(x) = -1 + \dfrac{x - x^{n+1}}{1-x}$ pour tout $x \neq 1$, donc avec $x = u_n$ on obtient :

$$f_n(u_n) = -1 + \frac{u_n - u_n^{n+1}}{1-u_n} = 0.$$

Donc $u_n - u_n^{n+1} = 1 - u_n$ puis $2u_n - u_n^{n+1} = 1 = u_n(2-(u_n)^n)$.

2.d. Comme $1 = u_n(2-(u_n)^n)$, on a $u_n = \dfrac{1}{2-(u_n)^n}$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = 0$ donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$