Mathématiques

Devoir libre n^{o} 2

à rendre le lundi 13 septembre 2010

Nombres complexes

- **L'usage de la calculatrice est interdit durant l'épreuve.**
- **Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.**
- **Si le candidat découvre en cours d'épreuve ce qu'il croît être une erreur d'énoncé, il le précisera dans sa copie.**
- **L'épreuve comporte un problème sur les nombres complexes.**

Problème

Calcul de $\cos\left(\dfrac{\pi}{17}\right)$ *selon Gauss*

L'objet de ce problème est d'exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ à l'aide de radicaux. Cette méthode fut élaborée en 1796 par Johann Carl Friedrich Gauss alors âgé de 19 ans seulement ! A partir de ce résultat, il est facile de déduire qu'un polygone régulier à 17 côtés est constructible à la règle et au compas. En fait, Gauss caractérisa presque complètement tous les polygones réguliers constructibles uniquement à la règle et au compas (Théorème de Gauss-Wantzel), et résolut de cette façon un problème posé par les mathématiciens de l'Antiquité grecque. Gauss était si satisfait de ce résultat qu'il demanda qu'un polygone régulier de 17 côtés soit gravé sur son tombeau.

Partie 1 — *Préliminaires sur quelques radicaux*

On pose $A = \left(1-\sqrt{17}\right)\cdot\sqrt{34-2\cdot\sqrt{17}}+8\cdot\sqrt{34+2\cdot\sqrt{17}}$.

1.1. Trouver le signe de A.

1.2. Calculer A^2. On écrira le résultat sous la forme $p+q\cdot\sqrt{17}$ avec $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$.

1.3. En déduire une expression *simple* de A.

Partie 2 — *Sommes trigonométriques*

Soient $(a,h)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On pose

$$S_n(a,h)=\sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+k\cdot h)\quad\text{et}\quad \Sigma_n(a,h)=\sum_{k=0}^{n-1}\sin(a+k\cdot h)$$

2.1. Lorsque $\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)=0$, calculer $S_n(a,h)$ et $\Sigma_n(a,h)$ en fonction de a et n.

2.2. On suppose que $\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)\neq 0$.

2.2.a. Montrer que

$$\Sigma_n(a,h)=\sin\left(a+\frac{(n-1)\cdot h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\dfrac{n\cdot h}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}$$

2.2.b. Calculer de même $S_n(a,h)$.

Partie 3 — *Le calcul*

On pose dans toute la suite du sujet $\theta = \frac{\pi}{17}$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \cos(3\cdot\theta)+\cos(5\cdot\theta)+\cos(7\cdot\theta)+\cos(11\cdot\theta) \\ x_2 & = & \cos(\theta)+\cos(9\cdot\theta)+\cos(13\cdot\theta)+\cos(15\cdot\theta) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & \cos(3\cdot\theta)+\cos(5\cdot\theta) \\ y_2 & = & \cos(7\cdot\theta)+\cos(11\cdot\theta) \\ y_3 & = & \cos(\theta)+\cos(13\cdot\theta) \\ y_4 & = & \cos(9\cdot\theta)+\cos(15\cdot\theta) \end{array}\right.$$

3. 1. *Calcul de x_1 et x_2.*

3. 1. a. Montrer que $x_1 > 0$.

3. 1. b. Calculer $x_1 + x_2$. On trouvera un nombre rationnel très simple.

3. 1. c. Simplifier $2\cdot x_1\cdot x_2$ en utilisant la formule $2\cdot\cos(a)\cdot\cos(b) = \cos(a+b)+\cos(a-b)$.

3. 1. d. Montrer qu'il existe une relation entre $x_1\cdot x_2$ et $x_1 + x_2$ du type :

$$x_1\cdot x_2 = k\cdot(x_1+x_2) \quad \text{où } k \text{ est un entier relatif à préciser}$$

3. 1. e. En déduire que $x_1\cdot x_2$ est un entier relatif que l'on précisera.

3. 1. f. En déduire les expressions de x_1 et x_2 à l'aide de radicaux.

3. 2. *Calcul de y_1, y_2, y_3 et y_4.*

3. 2. a. Calculer $y_1\cdot y_2$ et $y_3\cdot y_4$ en vous inspirant de ce qui précède.

3. 2. b. En déduire les expressions de y_1, y_2, y_3 et y_4 à l'aide de radicaux.

3. 3. *Calcul de* $\cos(\theta)$.

3. 3. a. Exprimer y_1 sous forme d'un produit de cosinus.

3. 3. b. Donner une expression de $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ à l'aide de radicaux.