Mathématiques

Devoir libre n° 7

à rendre le lundi 31 janvier 2010

Espaces vectoriels

- **L'usage de la calculatrice est interdit durant l'épreuve.**
- **Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.**
- **Si le candidat découvre en cours d'épreuve ce qu'il croît être une erreur d'énoncé, il le précisera dans sa copie.**
- **L'épreuve comporte 5 exercices sur les espaces vectoriels.**

Exercice 1 — *Projections*

On note $E = \mathbb{R}^3$ et

$$F = \{(x, y, z) \in E \mid x + z = 0\}$$

et

$$G = \{(x, y, z) \mid x = 2y = z\}.$$

1. Etablir que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

2. Calculer la projection du vecteur $X = (x, y, z)$ de E sur F parallélement à G.

Exercice 2 — *Idées reçues*

Soient A, B et C trois sev d'un $\mathbb{K}$-ev E. On note

$$F = (A \cap B) + (A \cap C), \quad G = A \cap (B + (A \cap C))$$

et $H = A \cap (B + C)$.

1. Montrer que F et G sont des sev de H.

2. Etablir que $F = G$.

3. A-t-on toujours $F = G = H$?

Exercice 3 — *Calcul d'une intersection*

Soient F, G, F' et G' quatre sev d'un $\mathbb{K}$-ev E tels que $F \cap G = F' \cap G'$. Etablir que

$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F.$$

Exercice 4 — *Espaces de fonctions*

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient $\mathscr{N}$ et $\mathscr{A}$ les sous-ensembles de E définis par,

$$\mathscr{A} = \{f \in E \mid f \text{ affine}\}$$

et

$$\mathscr{N} = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}.$$

1. Prouver que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{N}$ sont deux sous-espaces vectoriels de E.

2. Montrer que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{N}$ sont supplémentaires dans E.

3. Déterminer la projection sur $\mathscr{A}$ parallélement à $\mathscr{N}$ d'une fonction $f \in E$.

REMARQUE – *On rappelle qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est affine* si et seulement si *il existe deux réels a et b tels que $\forall\, t \in \mathbb{R}, f(t) = at + b$.*

Exercice 5 — *Somme de deux plans*

On note $E = \mathbb{R}^3$ et

$$F = \{(x, y, z) \in E \mid x + y - z = 0\}$$

et

$$G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Etablir que F et G sont des sev de E.

2. Déterminer $F \cap G$.

3. Prouver que $F + G = E$. La somme est-elle directe ?

Corrigé de l'exercice 1 — *Projections*

1. On a $X \in F$ *si et seulement si* $\exists x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$X = (x, y, -x) = x(1,0,-1) + y(0,1,0).$$

Ainsi $F = \mathrm{vect}((1,0,-1),(0,1,0))$ et F est un sous-espace vectoriel de E. Comme les deux vecteurs engendrant F ne sont pas colinéaires, $\dim(F) = 2$. De même, $X \in G$ *si et seulement si* $\exists y \in \mathbb{R}$ tels que

$$X = (2y, y, 2y) = y(2,1,2).$$

Ainsi $G = \mathrm{vect}((2,1,2))$ et G est un sous-espace vectoriel de E. Comme G est engendré par un vecteur non nul, $\dim(G) = 1$. Puisque $\dim(E) = 3 = \dim(F) + \dim(G)$, F et G sont supplémentaires dans E *si et seulement si*

$$F \cap G = \{0\}.$$

Un vecteur X appartient à $F \cap G$ *si et seulement si* il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que

$$X = (2y, y, 2y) \quad \text{et} \quad 2y + 2y = 0,$$

ie $X = (0,0,0)$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$, d'où le résultat.

2. Soit $X = (x, y, z) \in E$. On recherche l'unique vecteur g de G tel que $X - g \in F$. Puisque g est de la forme $g = (2\lambda, \lambda, 2\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on recherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X - (2\lambda, \lambda, 2\lambda) = (x - 2\lambda, y - \lambda, z - 2\lambda) \in F$. Cette condition équivaut à $x - 2\lambda + z - 2\lambda = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{x+z}{4}$. La projection du vecteur $X = (x, y, z)$ sur F parallèlement à G vaut donc

$$X - \lambda(2,1,2) = \left(\frac{x-z}{2}, \frac{4y-x-z}{4}, \frac{z-x}{2}\right).$$

Corrigé de l'exercice 2 — *Idées reçues*

1. Puisque les intersections et les sommes de sev de E sont des sev de E, F et G sont des sev de E. Il reste à vérifier que $F \subset H$ et $G \subset H$.

► Comme $A \cap B \subset A$ et $A \cap C \subset A$, on a

$$F \subset A + A = A.$$

De plus, $A \cap B \subset B$ et $A \cap C \subset C$ et donc

$$F \subset B + C$$

et ainsi $F \subset A \cap (B + C) = H$.

► Comme $A \cap C \subset C$, on a

$$B + (A \cap C) \subset B + C$$

et donc

$$G = A \cap (B + (A \cap C)) \subset A \cap (B + C) = H.$$

2. Procédons par double inclusion.

► Comme $A \cap B \subset A$ et $A \cap C \subset A$, on a

$$F \subset A + A = A$$

mias aussi

$$F \subset B + (A \cap C).$$

Ainsi $F \subset A \cap (B + (A \cap C)) = G$.

► Soit $u \in A \cap (B + (A \cap C))$: il existe $a \in A$, $b \in B$ et $a' \in A \cap C$ tels que

$$u = a = b + a'.$$

On a donc $b = a - a' \in A$ en tant que somme de deux vecteurs du sev A de E. Comme $b \in B$, on a

$$u = b + a' \in (A \cap B) + (B \cap C).$$

3. Non ! Par exemple, lorsque $E = \mathbb{R}^2$ et F, G, H sont des droites vectorielles deux à deux distinctes de E, on a :

$$F = G = \{0\} \quad \text{mais} \quad H = A \neq \{0\}.$$

Corrigé de l'exercice 3 — *Calcul d'une intersection*

Raisonnons par double inclusion.

▶ Comme

$$F \subset F + (G \cap F') \text{ et } F \subset F + (G \cap G'),$$

on a

$$F \subset (F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')).$$

▶ *Réciproquement*, soit

$$u \in (F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')).$$

Il existe alors f_1, f_2 dans F, $f' \in G \cap F'$ et $g \in G \cap G'$ tels que

$$u = f_1 + f' = f_2 + g.$$

On a donc

$$f' - g = f_2 - f_1 \in F$$

mais aussi $f' - g \in G$ en tant que somme de deux vecteurs du sev G de E. On a donc

$$f' - g \in F \cap G = F' \cap G' \subset G'$$

d'où $f' \in G'$ en tant que somme de deux vecteurs du sev G' de E. On a donc

$$f' \in F' \cap G' = F \cap G \subset F$$

et ainsi :

$$u = f_1 + f' \in F$$

en tant que somme de deux vecteurs du sev F de E. On a donc prouvé que

$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) \subset F.$$

Corrigé de l'exercice 4 — *Espaces de fonctions*

1. $\mathscr{N}$ et $\mathscr{A}$ sont deux ensembles non vides de E (ils contiennent tous deux la fonction nulle) et clairement stables par combinaison linéaire : ce sont deux sous-espaces vectoriels de E.

2. En avant !

▶ Soit $f \in \mathscr{A} \cap \mathscr{N}$; f appartient à $\mathscr{A}$ il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b.$$

Puisque $f \in \mathscr{N}$, $a = f'(0) = 0$ et $b = f(0) = 0$. Donc $f = 0$.

▶ Soit $f \in E$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$a(x) = f'(0)x + f(0)$$

et

$$n(x) = f(x) - a(x).$$

On a clairement $f = a + n$, $a \in \mathscr{A}$ et $n \in \mathscr{N}$: en effet $n'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$ et $n(0) = f(0) - f(0) = 0$. Ainsi $E \subset \mathscr{N} \oplus \mathscr{A}$ et , puisque l'inclusion réciproque est triviale , $E = \mathscr{N} \oplus \mathscr{A}$.

Remarque – *Les formules de a et n s'obtiennent naturellement par Analyse-synthèse.*

3. D'après les calculs précédents , la projection d'une fonction f sur $\mathscr{A}$ parallélement à $\mathscr{N}$ vaut

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f'(0)x + f(0).$$

Corrigé de l'exercice 5 — *Somme de deux plans*

1. On a $X \in F$ *si et seulement si* $\exists\, x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$X = (x, y, x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1).$$

Ainsi $F = \operatorname{vect}((1,0,1),(0,1,1))$ et F est un sous-espace vectoriel de E. De même, un vecteur X appartient à G *si et seulement si* $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$X = (a-b, a+b, a-3b) = a(1,1,1) + b(-1,1,-3).$$

Ainsi $G = \operatorname{vect}((1,1,1),(-1,1,-3))$ et G est un sous-espace vectoriel de E.

2. Un vecteur X appartient à $F \cap G$ *si et seulement si* il est de la forme $X = (a-b, a+b, a-3b)$ où a et b sont deux nombres réels vérifiant

$$(a-b)+(a+b)-(a-3b) = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a = -3b.$$

On a donc

$$\begin{aligned} F \cap G &= \left\{(-4b, -2b, -6b) \mid b \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \operatorname{vect}((-4,-2,-6)) = \operatorname{vect}((2,1,3)) \end{aligned}$$

3. Puisque $F \cap G \neq \{0\}$, la somme $F + G$ n'est pas directe.